



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

**MASTER EN MÉTODOS NUMÉRICOS PARA CÁLCULO Y  
DISEÑO EN INGENIERÍA**

***“Formulación e Implementación tipo u-p de un Modelo  
Mecánico para el Análisis de la Desecación en Suelos”***

Tesis de Master

Presentada por:

*Héctor Ulises Levatti*

Dirigida por:

*Pere Prat Catalán y*

*Alberto Ledesma Villalba*

---

Barcelona, Junio de 2008

# Motivación

Durante el año 2004 he realizado el cursado de las asignaturas del Master en Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería, impartido en el CIMNE y también he iniciado en Junio del mismo año el Doctorado en el Departamento de Ingeniería del Terreno en la UPC. Así, se ha definido como tesis doctoral el objetivo de formular e implementar un modelo numérico basado en la Mecánica de Medios continuos y la Mecánica de Fractura para ser resuelto mediante un programa de Elementos Finitos que nos acerque a la solución de los problemas relacionados con la *Formación y Propagación de Grietas en Suelos Arcillosos Sometidos a Procesos de Deseccación*. Como ha quedado pendiente también una tesina de Master para completar el primer curso, he decidido abordar un problema de menor envergadura que el mencionado arriba y presentarlo como tesis de Master. Eso si, siempre con la idea de que todo lo conseguido en la tesina de Master sea de utilidad para el progreso del desarrollo de la tesis doctoral.

Así pues, la propuesta será la *“Formulación e Implementación tipo u-p de un Modelo Mecánico para el Análisis de la Deseccación en Suelos”*. Considero que este es un buen primer paso para lograr el objetivo final que es el estudio del agrietamiento y se adecua perfectamente a los requerimientos de la tesina de Master.

He elegido la formulación mecánica solamente por su relativa simplicidad respecto de la hidro-mecánica pensada para un modelo mas avanzado y he dejado de lado el tratamiento de las grietas por ser en exceso complejo.

Con el modelo mecánico espero poder mostrar el papel que juega la succión en los fenómenos de desecación y contracción de suelos, identificándola como principal responsable del comportamiento mecánico de los suelos en un semiciclo de secado.

Con el código de elementos finitos programado en Matlab 7, se realizaron diversos ensayos numéricos en muestras con diferentes condiciones de contorno. Con estos ensayos se muestra como influye la succión en el proceso de secado.

Héctor Ulises Levatti

# Agradecimientos

La familia es la base fundamental de nuestra sociedad y es por supuesto el principal pilar para realizar cualquier tarea, es por ello que en primer lugar agradezco a mi familia más directa el apoyo para realizar esta actividad de investigación. En primer lugar a mi esposa Sandra y a mi hijo Alejandro para quienes cada día dedico mi esfuerzo. Mi madre Felicita, mi padre Ulises y mis hermanos Carmen y Oscar han sido y son para mí una base de apoyo fundamental sin olvidar a mi cuñado Luis y mis sobrinos Leandro y Mauricio que aunque estén lejos siempre están presentes.

En segundo lugar y es fundamental quiero agradecer a mi tutor de esta tesina Pere Prat por apoyarme en todo cuanto he necesitado a lo largo de este trabajo. De igual manera quiero agradecer a Alberto Ledesma, cotutor de mi tesis doctoral y siempre un apoyo a mis dudas constantes.

Quisiera no olvidarme de mis colegas en Argentina en la Universidad Nacional del Nordeste de donde he obtenido mis conocimientos de base, la ingeniería.

A mis compañeros de Master y de doctorado en especial a aquellos que se han transformado en buenos amigos ahí va mi agradecimiento.

El cursado de las asignaturas en formato presencial ha sido posible gracias a la beca que me ha concedido el Ministerio de Ciencia y Tecnología de España (becas MAE/AECI), por ese motivo va mi agradecimiento a dicho Ministerio actualmente llamado de Educación y Ciencia.

# Contenido

Motivación .....	I
Agradecimientos .....	II
Contenido .....	III
Lista de símbolos .....	VIII

## Capítulo 1

### INTRODUCCION

1.1 El problema de la desecación el suelos .....	1
--	---

## Capítulo 2

### EL SUELO COMO MEDIO POROSO MULTIFASE

2.1 Definiciones .....	5
2.2 Deformación del suelo y su tratamiento como problema mecánico .....	6

## Capítulo 3

### SUPERFICIES DE ESTADO

3.1 Complejidad .....	9
3.2 Superficies de estado .....	10

## Capítulo 4

### MODELO CONSTITUTIVO

4.1 Ecuaciones constitutivas para suelos no saturados .....	13
4.1.1 Elasticidad lineal en suelos no saturados .....	13
4.1.2 Elasticidad no lineal en suelos no saturados .....	15
4.2 Variables de estado .....	16

## Capítulo 5

### FORMULACION DE MODELO MECANICO PARA SUELOS NO SATURADOS

5.1 Hipótesis .....	21
5.2 Variables de estado .....	22
5.3 Ecuaciones de gobierno .....	23
5.3.1 Condiciones de contorno .....	23
5.3.2 Condiciones de contorno de tracción .....	24
5.4 Solución del problema de contorno .....	24

## Capítulo 6

### APROXIMACION POR ELEMENTOS FINITOS

6.1 Notación .....	27
6.2 El problema mecánico .....	28
6.3 Funciones de forma .....	29
6.4 Formulación “u-p” de elementos finitos para problema mecánico en suelos no saturados en 2 dimensiones .....	33
6.4.1 Elementos .....	33
6.4.2 Campo de presiones de poro de agua .....	33
6.4.3 Campo de desplazamientos .....	36

## Capítulo 7

### RESULTADOS DEL MODELO IMPLEMENTADO

7.1. Modelo con triángulos lineales .....	44
7.1.1. Ensayo nº 1: Efecto de la succión creciente durante proceso de desecación en una muestra de suelo con restricción de movimiento en la base .....	44
7.1.2. Resultados del ensayo nº 1 .....	45
7.1.3. Ensayo nº 2: Efecto de la succión creciente durante proceso de desecación en una muestra de suelo con restricción de movimiento en la base y los laterales .....	47
7.1.4. Resultados del ensayo nº 2 .....	48
7.1.5. Ensayo nº 3: Efecto de la succión creciente durante proceso de desecación en una muestra de suelo con restricción de movimiento en el lateral izquierdo .....	49

7.1.6. Resultados del ensayo nº 3	49
7.1.7. Ensayo nº 4: Análisis del agrietamiento en una muestra de suelo sometida a cambios de succión	51
7.1.8. Resultados del ensayo nº 4	52
7.1.9. Ensayo nº 5: Análisis del agrietamiento en una muestra de suelo sometida a cambios de succión	54
7.1.10. Resultados del ensayo nº 5	55
7.2. Modelo con triángulos cuadráticos	56
7.2.1. Ensayo nº 6: Contracción de muestra cuadrada bajo incrementos constantes de succión	57
7.2.2. Resultados del ensayo nº 6	57
7.2.3. Ensayo nº 7: Contracción de muestra cuadrada bajo incrementos constantes de succión	57
7.2.4. Resultados del ensayo nº 7	58
7.2.5. Ensayo nº 8: Contracción de muestra cuadrada bajo incrementos constantes de succión	58
7.2.6. Resultados del ensayo nº 8	58
7.2.7. Ensayo nº 9: Contracción de muestra cuadrada bajo incrementos variables de succión	59
7.2.8. Resultados del ensayo nº 9	59
7.2.9. Ensayo nº 10: Contracción de muestra cuadrada bajo incrementos variables de succión	60
7.2.10. Resultados del ensayo nº 10	60
7.2.11. Ensayo nº 11: Contracción de muestra cuadrada bajo incrementos variables de succión	61
7.2.12. Resultados del ensayo nº 11	61
7.2.13. Ensayo nº 12: Contracción de muestra rectangular bajo incrementos constantes de succión	62
7.2.14. Resultados del ensayo nº 12	62

## Capítulo 8

### LO QUE QUEDA POR HACER

8.1 Idea global .....	65
-----------------------	----

## Capítulo 9

### CONCLUSIONES

9.1 Conclusiones finales .....	69
--------------------------------	----

## Referencias

### R.1 LIBROS

### R.2 ARTICULOS

## Apéndice 1

### CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE MECÁNICA DE SUELOS

A1.1 Relaciones volumétricas .....	A.1
A1.2 Relaciones gravimétricas .....	A.1
A1.3 Otras variables importantes .....	A.3

## Apéndice 2

### NOTACIÓN MATRICIAL USADA EN ESTE TRABAJO

A2.1 Gradiente simétrico del campo de desplazamientos .....	A.5
A2.2 Teorema de la divergencia de Gauss .....	A.8
A2.3 Notación .....	A.9
A2.3.1 Tensor de tensiones .....	A.9
A2.3.2 Tensor de deformaciones infinitesimales .....	A.9
A2.3.3 Campo gravitacional terrestre .....	A.10
A2.3.4 Delta de Kronecker .....	A.10
A2.4 Operadores diferenciales en notación de índices, compacta y matricial .....	A.11
A2.5 Operador divergencia en forma matricial .....	A.12
A2.6 Operador de condiciones de contorno .....	A.12

## Apéndice 3

### MESH2D GNU LICENSE

## Apéndice digital

---

## CODIGOS

AD.1 Preproceso .....	AD.1
AD.2 Mallador estructurado .....	AD.1
AD.3 Resolución del problema por el método de elementos finitos en matlab .....	AD.1
AD.4 Problema hidráulico 1D .....	AD.2
AD.5 Resumen de Carpetas entregadas en el CD .....	AD.2



# LISTA DE SIMBOLOS

A continuación se resumen los símbolos más importantes que aparecerán a lo largo de la formulación del modelo.

En la notación los **superíndices** indican fases.

$s$  : Partículas sólidas (suelo)

$w$  : Fase líquida (Agua)

$a$  : Fase gaseosa (Aire húmedo = mezcla de aire seco mas vapor de agua)

Los **subíndices** forman parte de la notación indicial.

## TENSIONES:

$\sigma_{ij}$  ó  $\sigma$  : Tensor de tensiones totales de Cauchy (tracciones positivas).

$\sigma_{ij}^*$  ó  $\sigma^*$  : Tensor de tensiones netas.

$\sigma_m^*$  : Tensión media neta.

$s$  : Succión matricial.

$p$  : Presión de agua (compresiones positivas), (magnitud escalar)

$p^a$  : Presión de aire (compresiones positivas), (magnitud escalar)

## DEFORMACIONES:

$\varepsilon_{ij}$  ó  $\varepsilon$  : Tensor de deformaciones infinitesimales, son las deformaciones del esqueleto de suelo (recordar que son funciones de los desplazamientos de las partículas del suelo).

$\varepsilon_v$  : Deformación volumétrica del esqueleto de suelo debida a acciones mecánicas (tensiones netas)

$\varepsilon_v^s$  : Deformación volumétrica del esqueleto de suelo debida al efecto de la succión (efecto hidráulico)

## RIGIDECES:

$C_{ijkl}$  : Tensor de rigidez (Stiffness)

$D_{ijkl}$  : Tensor de flexibilidad (Compliance)

### DESPLAZAMIENTOS:

$u_i$  ó  $\mathbf{u}$  : Vector de desplazamientos de las partículas que forman el esqueleto de suelo.

$w_i$  ó  $\mathbf{w}$  : Vector de desplazamiento del fluido relativo a las partículas.

$\dot{w}_i \equiv q_i$  ó  $\mathbf{q}$  : Vector velocidad en el sentido de Darcy.

$\dot{U}_i = \dot{u}_i + \frac{\dot{w}_i}{n}$  ó  $\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{u}} + \frac{\mathbf{q}}{n}$  : Vector velocidad absoluta del fluido.

### PARÁMETROS MATERIALES MECÁNICOS:

$\mathbf{g}$  : Vector aceleración de la gravedad.

$K$  : Modulo de deformación volumétrica (mecánico)

$K^s$  : Módulo de deformación volumétrica debida a succión (hidráulico)

$G$  : Módulo de corte (mecánico)

$e$  : Relación de vacíos

$e_0$  : Relación de vacíos inicial

$n$  : Porosidad

$S_r$  : Grado de saturación

$a_1, a_2, a_3, a_4$  : Constantes de la superficie de estado

$p_{ref}$  : Presión de referencia

$P_{atm}$  : Presión atmosférica

### PARÁMETROS MATERIALES HIDRÁULICOS:

$K_{ij}$  ó  $\mathbf{K}$  : Tensor permeabilidad.

$k^{rl}$  : Permeabilidad relativa del agua.

$\mu^l$  : Viscosidad dinámica del agua.

$K^s$  : Módulo volumétrico de los granos de suelo.

$K^w$ :	Módulo volumétrico del agua.
$S_r$ :	Grado de saturación de agua.
$\lambda$ :	Parámetro material de la curva de retención de Van Genuchten.
$P_0$ :	Valor de entrada de aire a la porosidad de referencia $n_0$ .
$f_n$ :	Función propuesta que tiene en cuenta la influencia de la porosidad en la curva de retención mediante el parámetro $\eta$ .
$\eta$ :	Parámetro de la función $f_n$

### DENSIDADES:

$\rho^s$ :	Densidad de las partículas sólidas del suelo.
$\rho^w$ :	Densidad del agua.
$\rho^a$ :	Densidad del aire.
$\rho$ :	Densidad del suelo como conjunto de dos o tres fases distintas.
$K_{ij}$ ó $\mathbf{K}$ :	Tensor permeabilidad.
$k^{rl}$ :	Permeabilidad relativa del agua.
$\mu_l$ :	Viscosidad dinámica del agua.
$K^s$ :	Módulo volumétrico de los granos de suelo.
$K^w$ :	Módulo volumétrico del agua.

### AUXILIARES:

$\delta_{ij}$ :	Delta de Kronecker
$\mathbf{1}$ :	Tensor de segundo orden unitario
$\mathbf{L}$ :	Operador matricial divergencia
$\mathbf{n}$ :	Operador de proyección ortogonal

# Capítulo 1

## INTRODUCCION

### 1.1.- El problema de la desecación en suelos

Los suelos son usados como material de construcción desde el principio de la historia y para su estudio se requiere tener en cuenta muchos factores que en otros materiales no tienen importancia. Una dificultad característica de los suelos es que se trata de un sistema multifase, y además estas fases están formadas por uno o más componentes y a su vez se pueden presentar en varios estados, cambiantes a lo largo del tiempo. Si nos centramos específicamente en los suelos arcillosos por ejemplo debemos tener en cuenta que este puede presentarse totalmente seco, saturado o parcialmente saturado.

El problema que se va a abordar es la desecación de suelos arcillosos. El fenómeno de desecación parte generalmente desde el suelo totalmente saturado y acaba con el suelo en estado parcialmente saturado o seco. Se debe tener en cuenta que la transición entre estos tres estados implica gran cantidad de fenómenos físicos que hay que describir y estudiar si queremos entender los mecanismos implicados.

A primera vista el fenómeno de contracción debido a desecación cae en el campo de la mecánica de suelos no saturados y los problemas de flujo de aguas en medios porosos. Por simplicidad intentaré estudiar sin embargo estos procesos mediante un modelo exclusivamente mecánico.

Este fenómeno se entiende como aquel que es producido por acción solar (o mejor dicho acción climática, ya que no es necesaria la acción solar directa) sobre la superficie del suelo, pero cabe aclarar que la desecación puede producirse por cualquier otra fuente de calor como ser por ejemplo la producida por residuos radiactivos o cualquier otra fuente de calor que ocasione pérdidas de humedad en el suelo.

Naturalmente el suelo pierde agua por evaporación en su superficie y además por el consumo de agua de las plantas, fenómeno que en conjunto se denomina evapotranspiración, pero estos dos últimos casos no son los que pretendemos estudiar. Como hemos dicho, nuestro caso es básicamente la desecación producida por la acción climática.

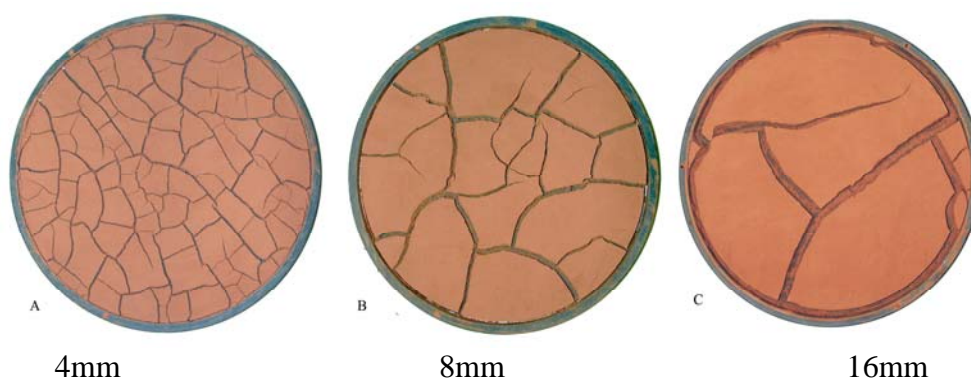
En este trabajo, se esboza un modelo matemático sencillo que se limita a reproducir el fenómeno de contracción debido a cambios en los perfiles de succión del suelo.

En la Figura 1.1 se observa un lecho arcilloso que por acción climática ha sido sometido a desecación. Se observan las grietas características de este tipo de procesos. En la Figura 1.2 a 1.6 se observan varios ejemplos de ensayos de desecación hechos en laboratorio bajo condiciones controladas. En la Figura 1.2 se ven tres bandejas circulares de distintos espesores y sus diferentes configuraciones de grietas. En la Figura 1.3 también se ven tres bandejas circulares pero donde en cada una se eligieron diferentes rugosidades en su base interior. Finalmente en la Figura 1.4 a 1.6 se observan varias bandejas rectangulares de diferentes tamaños.

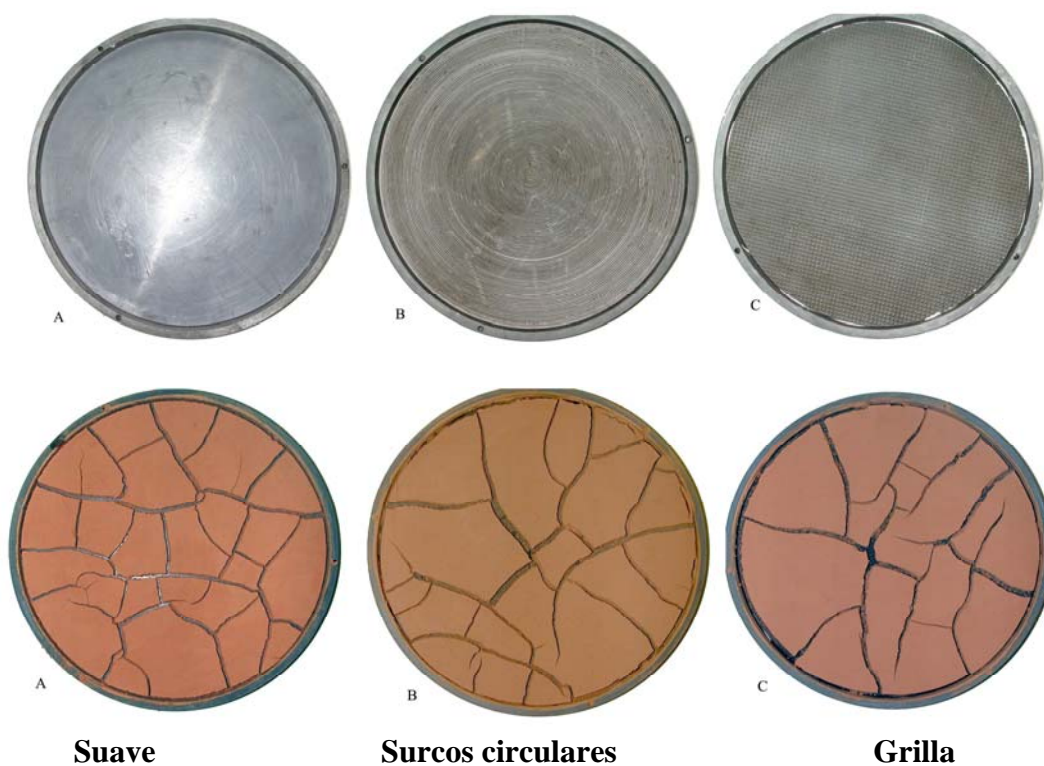
El presente trabajo pretende simular mediante un modelo de elementos finitos algunas características de este complejo fenómeno.



**Figura 1.1** - Estado final de un proceso de desecación in situ

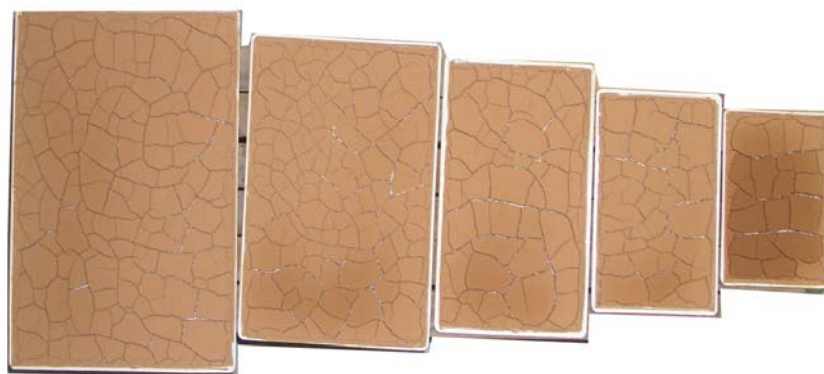


**Figura 1.2** - Bandejas circulares de diferentes espesores



**Figura 1.3** - Bandejas circulares de diferentes rugosidades en la base

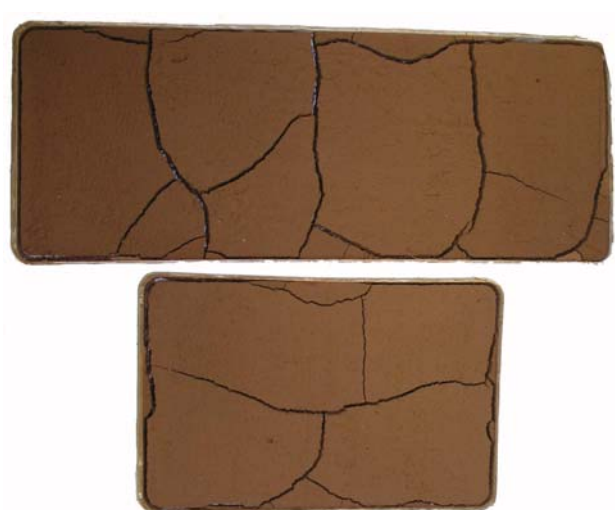




**Figura 1.4** - Bandejas rectangulares de distintos tamaños e igual relación de lados



**Figura 1.5** - Bandejas rectangulares de distintos



**Figura 1.6** - Bandejas rectangulares de distintos

## Capítulo 2

# EL SUELO COMO MEDIO POROSO MULTIFASE

### 2.1.- Definiciones

Si bien el fenómeno de desecación es extremadamente complejo, al principio debemos plantear el problema en los términos más sencillos posibles. Una buena alternativa es estudiar el fenómeno desde un punto de vista puramente mecánico.

Un sistema mecánico permanecerá en equilibrio hasta que haya alguna acción externa que modifique ese estado, así en este caso y si consideramos que no hay cargas externas la única variable mecánica que evoluciona con el tiempo es la succión.

En los poros de un suelo parcialmente saturado libre de toda carga externa, actúan las presiones de agua y de aire. La diferencia entre la presión de aire y agua es la variable de estado tensional denominada en mecánica de suelos no saturados “succión”, que matemáticamente se expresa:

$$s = p^a - p \quad (2.1)$$

Donde:  $p^a$  es la presión de aire y  $p$  es la presión de agua.

Si analizamos mas en detalle esta la (1.1) podemos decir que la succión y las presiones de aire y agua de poros mediante las cuales se define, serán funciones todas del grado de saturación y de la posición. Así:

$$s(S_r, \mathbf{x}) = p^a(S_r, \mathbf{x}) - p(S_r, \mathbf{x}) \quad (2.2)$$

Donde el grado de saturación es la relación entre el volumen de agua y el volumen de poros del suelo, es decir:



$$S_r = \frac{V_w}{V_p} \quad (2.3)$$

## 2.2.- Deformación del suelo y su tratamiento como problema mecánico

En el punto anterior, hemos definido la variable succión que será la única que produzca cambios en las tensiones y deformaciones en el medio poroso. Esto debido a que por hipótesis se desprecia la influencia del peso propio de la muestra, lo que implica despreciar también la pérdida de peso debido a pérdida de humedad.

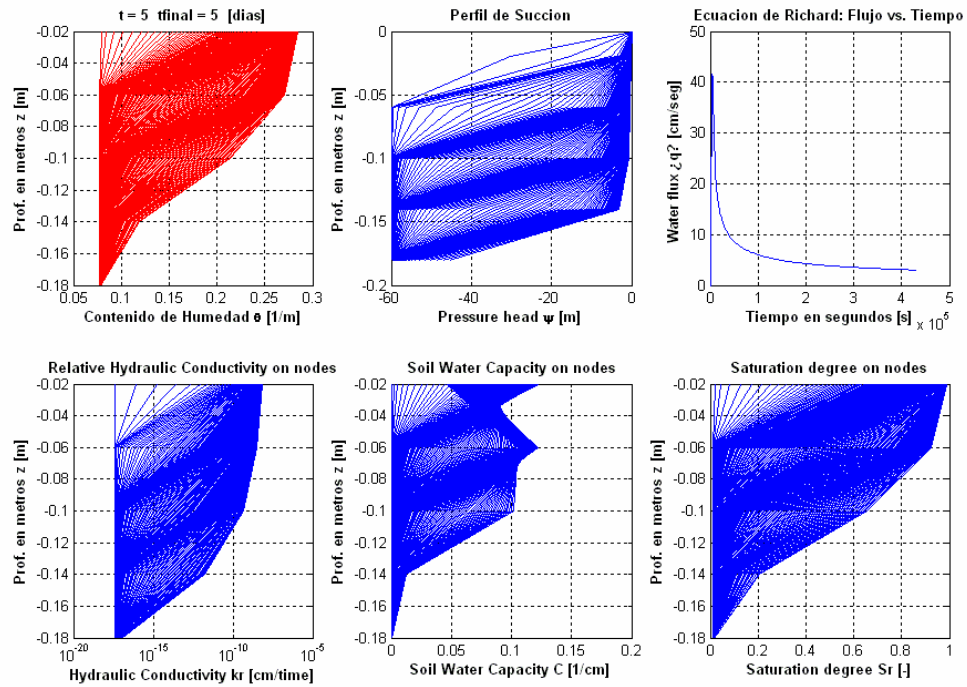
Otra hipótesis típica en suelos es considerar que las partículas sólidas son indeformables por lo que la deformación viene dada exclusivamente por la modificación del volumen de vacíos.

Es de suponer que los cambios de humedad por evaporación cambiarán el grado de saturación y esto provocará cambios en la succión que a su vez generará tensiones y deformaciones en el medio. También es de suponer que estos cambios en las tensiones provoquen en determinado momento grietas.

Como en este trabajo nos ceñimos a la utilización de un modelo mecánico, la succión será impuesta por el usuario, lo cual nos evita tener que resolver el problema hidráulico. Por supuesto sería mucho mejor poder resolver de manera acoplada el problema hidromecánico pero esto queda fuera del alcance de esta tesina. Este tratamiento mas sofisticado es parte de una tesis doctoral del autor que se está desarrollando en estos momentos.

Sin embargo mostramos aquí algunos resultados de un sencillo programa 1D que resuelve el problema hidráulico y muestra como varía entre otras cosas la succión a través del tiempo.

La Figura 2.1 muestra el resultado de una simulación de mojado de suelo durante 5 días con una succión inicial de -60 MPa. El mojado nos sirve porque como por hipótesis suponemos que no hay histéresis el proceso inverso de desecación tendrá un comportamiento en todo similar. Se ha tomado como referencia una profundidad de terreno de 20 cm y respecto de esta se ven las variaciones del contenido de humedad  $\theta[\%]$ , la “Pressure head”  $\psi[m]$  y los siguientes parámetros del suelo que son función de la presión de poros:



**Figura 2.1** – El problema hidráulico de mojado

La conductividad hidráulica  $k_s \left[ \frac{cm}{seg} \right]$ , el “soil water capacity”  $C \left[ \frac{1}{m} \right]$  y el grado de saturación  $S_r [\%]$ .

Estos resultados nos dan idea de cómo varían las presiones de poro y los parámetros del suelo en función de esta y nos permiten imponer dicha presión como cargas en nuestro modelo mecánico para evitar tener que resolver el problema hidráulico.



# Capítulo 3

## SUPERFICIES DE ESTADO

### 3.1.- Complejidad

En general, el suelo puede considerarse un sistema formado por tres fases: sólida, líquida y gaseosa. Existen sin embargo dos estados particulares solo bifásicos, el suelo seco (partículas y aire) y el suelo saturado (partículas y agua). Para el caso saturado, Karl Terzaghi (1925) propuso su famoso principio de tensiones efectivas que dice que todo cambio cuantificable (compresión, deformación, resistencia al corte) está directamente relacionado con un cambio en la tensión efectiva cuya definición es:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + u_w \delta_{ij} \quad (3.1)$$

Esta expresión no es una ley física, ni ley constitutiva. Es simplemente una expresión que define a la variable de estado de tensiones efectivas  $\sigma'_{ij}$  que es la que define precisamente el estado de tensiones del suelo saturado en un punto. Este principio ha sido revisado y aceptado mundialmente.

Sin embargo cuando el suelo se presenta parcialmente saturado aún hoy hay discusión a cerca de cómo enfocar el comportamiento del suelo.

Desde los años 40 se ha intentado obtener una expresión similar a la de Terzaghi aplicable a suelos no saturados pero sin éxito. Al día de hoy este sigue siendo un campo abierto de investigación. Para poder trabajar con este tipo de suelos sin embargo debemos proponer alguna técnica y así tenemos dos opciones.

La primera es asumir válida alguna de las expresiones propuestas tales como la de Bishop (1959)

$$\sigma'_{ij} = (\sigma_{ij} - u_a \delta_{ij}) + \chi(u_a - u_w) \delta_{ij} \quad (3.2)$$

Otro camino es considerar que no es posible caracterizar el comportamiento del suelo con una sola variable y tener en cuenta que el estado de un suelo saturado depende del estado de tensiones  $\sigma_{ij}$ , la relación de vacíos  $e$ , el grado de saturación  $S_r$  y de la estructura o fábrica del suelo  $\lambda$ , donde  $\lambda$  en general no será un escalar.

## 3.2.- Superficies de estado

El estado de un elemento de suelo puede representarse gráficamente por un punto en un espacio de parámetros de estado. Considerando un espacio donde las coordenadas representan  $(\sigma - u_a)$ ,  $(u_a - u_w)$  y  $e$ , tensión neta, succión y relación de vacíos respectivamente, podemos representar la historia de los estados del suelo no saturado.

En la figura 3.1 se muestra la grafica de la superficie de estado definida por la siguiente expresión:

$$e = e_0 + a(\sigma - u_a) + b(u_a - u_w) \quad (3.3)$$

Donde:

$e$ : relación de vacíos

$e_0$ : relación de vacíos inicial

$a$  y  $b$ : pendientes de las trazas del plano respecto en los planos  $e - (u_a - u_w)$  y

$e - (\sigma - u_a)$  respectivamente.

$\sigma$ : tensión total media

$u_a$ : presión de aire

$u_w$ : presión de agua

Para relaciones tensión deformación no lineales tendremos que recurrir a expresiones de superficie de estado no lineales.

$$e = e_0 + a \log(\sigma - u_a + P_{atm}) + b \log(u_a - u_w + P_{atm}) + c \log(\sigma - u_a + P_{atm}) \log(u_a - u_w + P_{atm}) \quad (3.4)$$

Donde

$c$ : parámetro del suelo adicional para la relación no lineal

$P_{atm}$  : presión atmosférica que se toma como un valor de referencia.

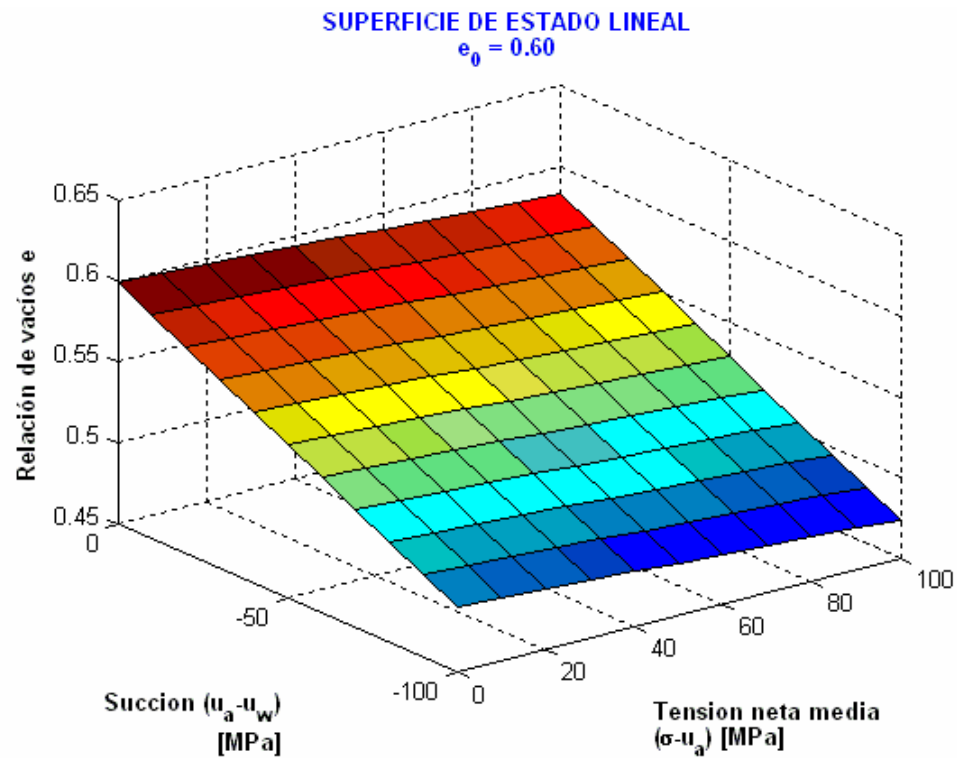


Figura 3.1 – Superficie de estado lineal

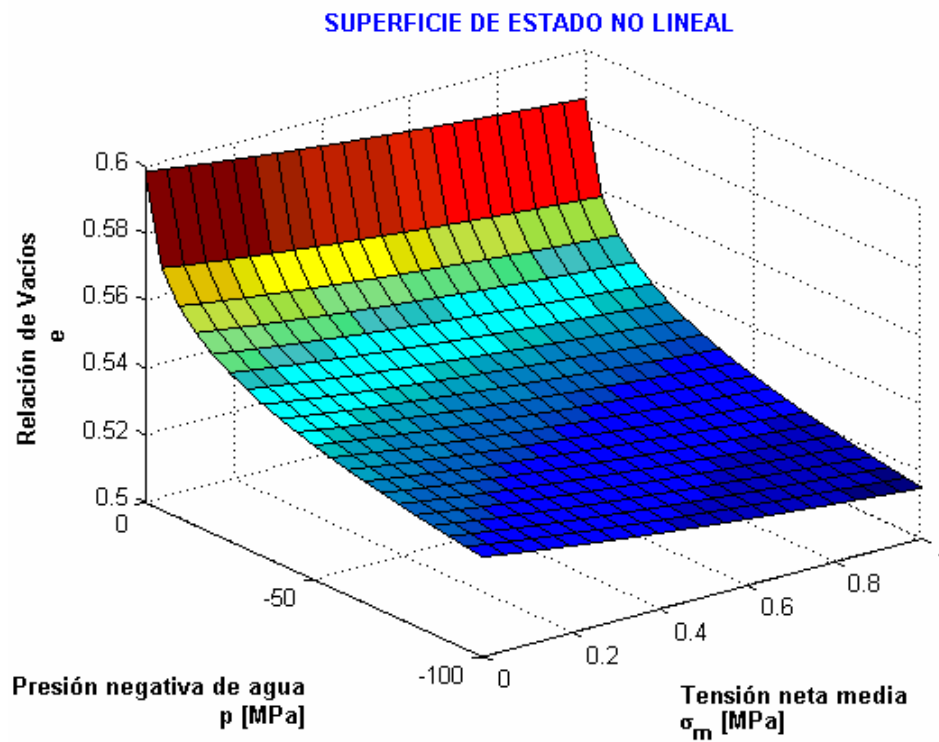


Figura 3.2 – Superficie de estado no lineal

En la tabla 3.1 se resumen los valores de los parámetros utilizados para obtener las superficies de estado de las anteriores figuras.

**Tabla 3.1**

		$a$	$b$	$c$	$P_{atm}$
Superficie de estado lineal		-1.667e-4	1.0909e-3	-	-
Superficie de estado no lineal	Succiones bajas <0.2MPa	-0.02	-0.003	-0.00041	1.05
	Succiones altas >0.2MPa	-0.02	-0.015	-0.00041	1.05

# Capítulo 4

## MODELO CONSTITUTIVO

### 4.1.- Ecuaciones constitutivas para suelos no saturados

La mayor diferencia entre otros materiales y el suelo radica en la relación tensión-deformación que en suelos es extremadamente compleja. Para obtener modelos constitutivos prácticos, es necesario recurrir a simplificaciones.

#### 4.1.1.- Elasticidad lineal en suelos no saturados

Podemos utilizar como relación constitutiva la elasticidad lineal de Fredlund (1985), en la cual de deformación volumétrica viene dada por:

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_v^\sigma + d\varepsilon_v^s = \frac{d\sigma_m}{K} + \frac{dp}{K^s} \quad (4.1)$$

Donde:  $\sigma_m = \frac{\sigma_{kk}}{3}$ , es la tensión media neta;  $K$ , es el módulo volumétrico relacionado con los cambios en la tensión media neta;  $p$ , es la presión de agua de poros (ó succión) y  $K^s$ , es el módulo volumétrico relacionado con los cambios en succión.

En síntesis, podemos expresar esta relación tensión-deformación de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} d(\sigma_x - p^a) \\ d(\sigma_y - p^a) \\ d(\sigma_z - p^a) \\ d\tau_{xy} \\ d\tau_{xz} \\ d\tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_x - \frac{1}{3K^s}d(p^a - p) \\ d\varepsilon_y - \frac{1}{3K^s}d(p^a - p) \\ d\varepsilon_z - \frac{1}{3K^s}d(p^a - p) \\ d\gamma_{xy} \\ d\gamma_{xz} \\ d\gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$



Con la hipótesis de que  $p^a = 0$ , la presión de aire se mantiene igual a la presión atmosférica y está es constante e igual a cero:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \\ d\tau_{xy} \\ d\tau_{xz} \\ d\tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_x + \frac{1}{3K^s}dp \\ d\varepsilon_y + \frac{1}{3K^s}dp \\ d\varepsilon_z + \frac{1}{3K^s}dp \\ d\gamma_{xy} \\ d\gamma_{xz} \\ d\gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Como:  $d\varepsilon_v^s = -\frac{dp}{K^s}$ , podemos escribir también:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \\ d\tau_{xy} \\ d\tau_{xz} \\ d\tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_x - \frac{1}{3}d\varepsilon_v^s \\ d\varepsilon_y - \frac{1}{3}d\varepsilon_v^s \\ d\varepsilon_z - \frac{1}{3}d\varepsilon_v^s \\ d\gamma_{xy} \\ d\gamma_{xz} \\ d\gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Tenemos que determinar tres parámetros del material:  $K, K^s$  y  $G$ .

Para el caso de deformación plana que utilizaremos en nuestro modelo 2D la relación tensión-deformación se resume por la siguiente expresión matricial:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_x - \frac{1}{3}d\varepsilon_v^s \\ d\varepsilon_y - \frac{1}{3}d\varepsilon_v^s \\ d\gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Si bien para este caso la tensión  $\sigma_z \neq 0$ , nosotros no la consideramos en la implementación.

#### 4.1.2.- Elasticidad no lineal en suelos no saturados

Nos proponemos aquí desarrollar un modelo constitutivo elástico no lineal. Los modelos elásticos basados en la mecánica de los medios continuos se clasifican generalmente en:

Elasticidad Lineal (Ley de Hooke generalizada)

Elasticidad de Cauchy

Hiperelasticidad (o Elasticidad de Green)

Hipoelasticidad

El modelo que se propone aquí será elástico de Cauchy en formulación incremental (tangente) no lineal basado en el concepto de superficies de estado.

Una vez integrada la relación se puede expresar:

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{kl}) \quad (4.6)$$

Veremos luego que por comodidad y pensando en la programación a esta relación la podremos expresar de la siguiente forma:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{(t)} d\varepsilon_{kl} \quad (4.7)$$

Donde  $C_{ijkl}^{(t)}$ , es una matriz de coeficientes tangentes cuyas expresiones en función de la succión o el grado de saturación y de la tensión neta se obtienen a partir del concepto de superficies de estado.

El hecho de que el comportamiento constitutivo del suelo sea muy complejo hace que las relaciones propuestas tengan un rango de aplicación muy acotado. Este caso no es la excepción, así el modelo constitutivo que se plantea, está pensado para procesos de desecación, donde se producen deformaciones edométricas o a lo sumo triaxiales y siempre pensando en un solo semiciclo de desecación.

## 4.2.- Variables de estado

Cuando debemos modelar el comportamiento de materiales que tienen varias fases como es el caso de los suelos. La idea es pensar en varios medios continuos que conviven en un mismo espacio. Así en el caso del suelo no saturado que consta de tres fases, fase sólida (granos de suelo), fase líquida (agua) y fase gaseosa (vapor de agua + aire seco), tendremos tres medios continuos.

Lo primero que haremos será definir las variables tensionales de trabajo para este caso, estas serán dos, la tensión neta (tensión total en exceso de la presión de aire) y la succión (presión de aire menos presión de agua) definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \text{Tensión neta:} \quad \sigma_{ij}^* &= \sigma_{ij} - p^a \delta_{ij} & \Rightarrow & \quad d\sigma_{ij}^* = d\sigma_{ij} - dp^a \delta_{ij} \\
 \text{Succión:} \quad s &= p^a - p & \Rightarrow & \quad ds = dp^a - dp
 \end{aligned}$$

Donde  $p^a$  es la presión del aire,  $p$  es la presión de poro de agua,  $\sigma_{ij}$  es el tensor de tensiones totales y  $dp^a, dp, d\sigma_{ij}$  sus respectivos incrementos diferenciales y  $\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker.

Pensando en una porción de suelo no saturado, si aplicamos una deformación al conjunto la el incremento de deformación total será igual a la suma de los incrementos de deformaciones producidos por las tensiones netas y la succión, así:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^* + d\varepsilon_{ij}^s = D_{ijkl}^{(t)}(K, G) d\sigma_{kl}^* + h_{ij}^{(t)}(K^s) ds \quad (4.8)$$

Donde,  $D_{ijkl}^{(t)}(K, G)$  es la matriz de flexibilidad (Compliance), tangente  $^{(t)}$ , por tratarse de una relación no lineal y  $h_{ij}^{(t)}(K^s)$ , es un vector que contiene el modulo de deformación volumétrica relacionado con la succión y también es tangente. Cuando decimos tangente queremos significar que esta matriz varía con la tensión neta y con la succión, puesto que en una relación lineal esta matriz también sería tangente pero no constante.

Despejando podemos obtener los incrementos de tensión neta en función de los incrementos de deformación total y de los incrementos de succión, esto es:

$$d\sigma_{kl}^* = \left[ D_{ijkl}^{(t)}(K, G) \right]^{-1} (d\varepsilon_{ij} - h_{ij}^{(t)} ds) = C_{ijkl}^{(t)}(K, G) (d\varepsilon_{ij} - h_{ij}^{(t)} ds) \quad (4.9)$$

Donde  $C_{ijkl}^{(t)}(K, G)$  es la matriz de rigidez (Stiffness) tangente y es la inversa de  $D_{ijkl}^{(t)}(K, G)$  matriz de flexibilidad (Compliance) también tangente. Ver la forma de estas matrices en el anexo donde se escriben todas estas ecuaciones en forma matricial.

Para el caso elástico lineal  $K, G$  y  $K^s$ , serán constantes del material y formarán parte del tensor de rigidez y/o flexibilidad de la relación tensión-deformación y será por supuesto constante. Para el caso no lineal tenemos que obtener expresiones de esos coeficientes en función de la tensión neta y de la succión. Para ello utilizamos el concepto de “Superficies de Estado” que está basado en ensayos de laboratorio para condiciones edométricas o triaxiales cuya expresión más exacta viene dada por:

$$\varepsilon_v = -\frac{e}{1+e} = -a_1 \ln(\sigma_m^* + a_4) - a_2 \ln\left(\frac{s + p_{ref}}{p_{ref}}\right) - a_3 \left[ \ln(\sigma_m^* + a_4) \ln\left(\frac{s + p_{ref}}{p_{ref}}\right) \right] \quad (4.10)$$

De  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^* + \varepsilon_{ij}^s \Rightarrow d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^* + d\varepsilon_{ij}^s$ , contrayendo índices podemos llegar a que:  $d\varepsilon_{ii} = d\varepsilon_{ii}^* + d\varepsilon_{ii}^s$ , es decir,  $d\varepsilon_v = d\varepsilon_v^* + d\varepsilon_v^s$  la deformación volumétrica total es igual a la deformación volumétrica producida por la tensión neta mas la deformación volumétrica producida por la succión. Ahora bien, derivando esta última expresión respecto de la tensión neta

primero y luego de la succión podemos obtener expresiones de los módulos elásticos volumétricos tangentes, así, partiendo de que las deformaciones volumétricas debidas a tensiones netas y a succión son respectivamente:

$$d\varepsilon_v^* = \frac{d\sigma_m^*}{K_t(\sigma_m^*, s)} \quad (4.11)$$

$$d\varepsilon_v^s = \frac{ds}{K_t^s(\sigma_m^*, s)} \quad (4.12)$$

El incremento de deformación volumétrica total será:

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_v^* + d\varepsilon_v^s = \frac{d\sigma_m^*}{K_t(\sigma_m^*, s)} + \frac{ds}{K_t^s(\sigma_m^*, s)} \quad (4.13)$$

Diferenciando la expresión de la superficie de estado:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_v = \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \sigma_m^*} d\sigma_m^* + \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial s} ds = & \left[ -a_1 \frac{1}{\sigma_m^* + a_4} - a_3 \ln\left(\frac{s + p_{ref}}{p_{ref}}\right) \frac{1}{\sigma_m^* + a_4} \right] d\sigma_m^* + \\ & + \left[ -a_2 \frac{1}{s + p_{ref}} \frac{1}{p_{ref}} - a_3 \ln(\sigma_m^* + a_4) \frac{1}{s + p_{ref}} \frac{1}{p_{ref}} \right] ds \end{aligned} \quad (4.14)$$

Y comparando con la anterior:

$$K_t(\sigma_m^*, s) = \frac{\sigma_m^* + a_4}{-a_1 - a_3 \ln\left(\frac{s + p_{ref}}{p_{ref}}\right)} \quad (4.15)$$

Y

$$K_t^s(\sigma_m^*, s) = \frac{s + p_{ref}}{-a_2 - a_3 \ln(\sigma_m^* + a_4)} \quad (4.16)$$

Es decir, el inverso de los módulos volumétricos debidos a la tensión neta  $K_t$  y a la succión  $K_t^s$ , son respectivamente iguales a la variación de la deformación volumétrica respecto de la tensión neta y la succión.

Para el caso en que se suponga que la presión del aire será siempre igual a la presión atmosférica y tomando esta igual a cero ( $p^a = 0$ ), las variables tensionales quedan:

Tensión neta:	$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}$	$\Rightarrow$	$d\sigma_{ij}^* = d\sigma_{ij}$
Tensión media neta:	$\sigma_m^* = \sigma_m$	$\Rightarrow$	$d\sigma_m^* = d\sigma_m$
Succión:	$s = -p$	$\Rightarrow$	$ds = -dp$

De esta manera la expresión de la superficie de estado queda:

$$\varepsilon_v = -\frac{e}{1+e_0} = -a_1 \ln(\sigma_m + a_4) - a_2 \ln\left(\frac{-p + p_{ref}}{p_{ref}}\right) - a_3 \left[ \ln(\sigma_m + a_4) \ln\left(\frac{-p + p_{ref}}{p_{ref}}\right) \right] \quad (4.17)$$

Y los módulos derivados de esta función serán:

Módulo volumétrico:

$$K_t(\sigma_m, p) = \frac{\sigma_m + a_4}{-a_1 - a_3 \ln\left(\frac{-p + p_{ref}}{p_{ref}}\right)} \quad (4.18)$$

Módulo de succión:

$$K_t^s(\sigma_m, p) = \frac{-p + p_{ref}}{-a_2 - a_3 \ln(\sigma_m + a_4)} \quad (4.19)$$

Adoptando un coeficiente de Poisson constante queda definido el módulo de corte tangente de la siguiente manera:

$$G_t = \frac{3K_t(1-2\nu)}{2(1+\nu)} = \frac{3(\sigma_m + a_4)(1-2\nu)}{2(1+\nu) \left[ -a_1 - a_3 \ln \left( \frac{-p + p_{ref}}{p_{ref}} \right) \right]} \quad (4.20)$$

Y la relación tensión deformación:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{(t)} (d\varepsilon_{kl} + \frac{dp}{3K_t^s} \delta_{kl}) = C_{ijkl}^{(t)} (d\varepsilon_{kl} - \frac{d\varepsilon_v^s}{3} \delta_{kl}) \quad (4.21)$$

En definitiva de forma más general la relación tensión deformación para suelos no saturados, basada en superficies de estado queda:

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^{(t)} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^s) \quad (4.22)$$

Siendo:

$\sigma_{ij}$  : Tensor de tensiones totales o netas, para el caso es igual por ser  $p^a = p_{atm} = 0$

$\varepsilon_{kl}$  : Tensor de deformaciones totales

$\varepsilon_{kl}^s$  : Tensor de deformaciones debido a succión, es un tensor esférico, donde:

$$\varepsilon_{11}^s = \varepsilon_{22}^s = \varepsilon_{33}^s = \frac{\varepsilon_v^s}{3} = \frac{p}{3K_t^s} \text{ y } \varepsilon_{12}^s = \varepsilon_{13}^s = \varepsilon_{23}^s = 0$$

## Capítulo 5

# FORMULACIÓN DE MODELO MECÁNICO PARA SUELOS NO SATURADOS

### 5.1.- Hipótesis

En toda formulación es necesario en primer lugar definir claramente cuales son las hipótesis de partida y las simplificaciones adoptadas para el modelo. En este caso son las siguientes:

- 1.- Se abordará el caso de formulación mecánica del problema usando las ecuaciones de equilibrio.
- 2.- Se consideran fenómenos isotermos, se asume equilibrio térmico entre las fases, es decir, las tres fases están a igual temperatura.
- 3.- Las deformaciones son infinitesimales por lo que la configuración de referencia y la actual coinciden.
- 4.- Se considera que las deformaciones son lentas, por lo que podemos despreciar las aceleraciones (modelo cuasiestático, las fuerzas de inercia son despreciables).
- 5.- Se considera el medio poroso parcialmente saturado, en los poros hay dos fases: una líquida (agua) y otra gaseosa (aire seco y vapor de agua).
- 6.- Se supone que no hay resistencia al flujo de aire y vapor de agua en los poros por lo que la presión de la fase gaseosa permanece igual a la presión atmosférica (adoptamos  $P_{atm} = 0$ ).
- 7.- Las incógnitas del problema son los desplazamientos de la matriz sólida  $\mathbf{u}$ ; el campo de presiones de poro de agua  $p$  será impuesto, es decir, introducido como dato.
- 8.- Se utilizará el método de los elementos finitos para discretizar el problema espacial.



Si el problema fuese planteado como acoplado hidromecánico, la hipótesis 7 no sería necesaria, ya que la formulación sería de tal forma que se resolvería simultáneamente tanto el campo de desplazamientos como el campo de presiones de poro.

## 5.2.- Variables de estado

El comportamiento constitutivo de los suelos no saturados ha sido estudiado, principalmente a través de la experimentación durante décadas. Inicialmente Bishop (1959) y Aitchison y Bishop (1960) sugirieron la existencia de una tensión efectiva emparentada con la de los suelos saturados, definida como:

$$\sigma' = \sigma - p_a + \chi(p_a - p_w) \quad (5.1)$$

Donde  $\sigma$  es la tensión total.  $p_a$  y  $p_w$  la presión de aire y agua respectivamente y  $\chi$  es un parámetro que depende grandemente del grado de saturación, la historia de tensiones y de la estructura del suelo.

El concepto de tensión efectiva fue luego cuestionado por Jennings y Burland (1962), Bishop y Blight (1963), Aitchison (1965), Blight (1965) y Burland (1965). Bishop y Blight (1963), Blight (1965) y Burland (1965) sugirieron la conveniencia de utilizar como variables de tensión  $(\sigma - p_a)$  y  $(p_a - p_w)$ .

Mediante el “null test” Fredlund y Morgenstern (1977) mostraron que el mencionado par de tensiones son de hecho un sistema que representa bien el comportamiento de los suelos parcialmente saturados. Así:

$$\sigma_{ij}^*(\mathbf{x}) = \sigma_{ij}(\mathbf{x}) - p^a(\mathbf{x})\delta_{ij} \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) - p^a(\mathbf{x})\mathbf{1}^* \quad (5.2)$$

$$s(\mathbf{x}) = p^a(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x})^* \quad (5.3)$$

Donde:  $\mathbf{1} = \delta_{ij}$ , es el delta de Kronecker.

Deformaciones infinitesimales:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (5.4)$$

El operador  $\nabla^S$ , se denomina gradiente simétrico y se define tal como muestra la expresión de la deformación infinitesimal, es decir:  $\nabla^S \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u})$ , donde  $\mathbf{u}$ , puede ser una magnitud escalar, vectorial o tensorial. Mas adelante se detalla la forma del operador matricial  $\mathbf{L}$  (Ver además en Apéndice II).

\*Para este problema, las tensiones, deformaciones y desplazamientos son función de la posición. Por simplificar la escritura de las ecuaciones muchas veces no se aclara esta cuestión.

### 5.3.- Ecuaciones de gobierno

La ecuación de balance de momento lineal (o equilibrio) en términos de tensiones totales es:

$$\sigma_{ij,j} + \rho g_i = 0 \quad \text{ó} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} = 0 \quad (5.5)$$

Donde  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ , indica divergencia del tensor de tensiones, con  $\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]^T$  o también  $\text{div}(\boldsymbol{\sigma})$ .

Además la densidad del medio multifásico se calcula mediante la expresión:

$$\rho = (1-n)\rho^s + nS_r\rho^w (*) \quad (5.6)$$

Donde  $n = V_p / V_T$ , es la porosidad,  $\rho^s$ , es la densidad de las partículas de suelo y  $\rho^w$ , es la densidad del agua y  $S_r$  es el grado de saturación del agua.

#### 5.3.1.- Condiciones de Contorno

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{ó} \quad \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{en } \Gamma \quad (5.7)$$

$$p = \hat{p} \quad \text{en } \Gamma \quad (5.8)$$

### 5.3.2.- Condiciones de Contorno de tracción

$$\sigma_{ij}n_j = \sigma_{ji}n_j = T_i \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en } \Gamma \quad (5.9)$$

$$\mathbf{I}^T \boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad (5.10)$$

### 5.4.- Solución del problema de contorno

El problema de contorno al que nos enfrentamos puede representarse de la siguiente manera:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{C}(\mathbf{u}) + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (5.11)$$

Con

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \mathbf{M}(\mathbf{u}) + \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma \quad (5.12)$$

Donde  $\mathbf{C}$ , es un operador diferencial aplicado a la incógnita  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{p}$  es una función conocida e independiente de la variable  $\mathbf{u}$ .  $\mathbf{M}$ , es también un operador diferencial y  $\mathbf{q}$ , es una función conocida e independiente de  $\mathbf{u}$ , la cual da valores exactos de la solución del problema de contorno.

Considerando la siguiente expresión integral:

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{A}(\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{B}(\mathbf{u}) d\Gamma = 0 \quad (5.13)$$

y asumiendo que se satisface para un conjunto arbitrario de funciones  $\mathbf{v}$  y  $\bar{\mathbf{v}}$ . Esto es equivalente a satisfacer la ecuación diferencial y su condición de borde.

Esta expresión rara vez tiene solución analítica por lo que habrá que recurrir a soluciones aproximadas, como por ejemplo el método de los elementos finitos. En el cual se aproxima la solución mediante una función  $\hat{\mathbf{u}}$ , apoyada en los nodos del elemento.

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum_i^r \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{N} \mathbf{a} \quad (5.14)$$

$\mathbf{N}_i$ , son funciones de forma en términos de variables independientes (e.g., las coordenadas).  $\mathbf{a}_i$ , son los valores de la incógnita en los nodos del elemento finito.

Reemplazando la incógnita  $\mathbf{u}$ , por su aproximación y evaluando la expresión integral, obtendremos cierto residuo (que equivale al error cometido al aproximar), así:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_\Omega + \mathbf{R}_\Gamma = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{u}}) + \mathbf{B}(\hat{\mathbf{u}}) \quad (5.15)$$

Reemplazando en la expresión integral:

$$\int_\Omega \mathbf{w}^T \mathbf{A}(\hat{\mathbf{u}}) d\Omega + \int_\Gamma \bar{\mathbf{w}}^T \mathbf{B}(\hat{\mathbf{u}}) d\Gamma = 0 \quad \text{ó} \quad \int_\Omega \mathbf{w}^T \mathbf{R}_\Omega d\Omega + \int_\Gamma \bar{\mathbf{w}}^T \mathbf{R}_\Gamma d\Gamma = 0 \quad (5.16)$$

Una vez elegidas las funciones de peso  $\mathbf{w}$  y  $\bar{\mathbf{w}}$ , se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas cuyas incógnitas son los  $\mathbf{a}_i$ . Este sistema puede escribirse de la siguiente manera:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (5.17)$$

con

$$\mathbf{K}_{ij} = \sum_{e=1}^m \mathbf{K}_{ij}^e \quad \text{y} \quad \mathbf{f}_i = \sum_{e=1}^m \mathbf{f}_i^e$$

La simetría de la matriz de rigidez puede perderse eligiendo mal las funciones de peso. Esto restringe la posibilidad de elección de las mismas.



## Capítulo 6

# APROXIMACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

### 6.1.- Notación

A partir de aquí se trabajará con notación matricial. Resulta cómodo y sobre todo para la posterior programación el utilizar la notación matricial. Primeramente se darán una serie de definiciones:

Tensor de tensiones de Voigt:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Tensor de deformaciones infinitesimales de Voigt:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} \quad (6.3)$$

Vector campo gravitacional terrestre:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & -g \end{bmatrix}^T \quad (6.4)$$

$g$ : es la aceleración de la gravedad que se supone coincide con la dirección del eje  $z$ .

Delta de Kronecker en formato vectorial (notación de Voigt):

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (6.5)$$

El operador divergencia se expresa mediante una matriz de 3x2:

$$\nabla \cdot \equiv \overline{\nabla}^T \equiv \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Que se aplica sobre por ejemplo el vector de tensiones en la ecuación de equilibrio, donde premultiplica a dicho vector y traspuesta porque el vector de tensiones es de 3x1 y  $\mathbf{L}$  es de 3x2.

Operador nabra (gradiente):  $\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right]^T$

En la expresión de las condiciones de contorno  $\mathbf{I}^T \boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{0}$  aparece un operador  $\mathbf{I}$  que está relacionado con el vector normal al contorno  $\mathbf{n} = \{n_x, n_y\}^T$  y se escribe:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

## 6.2.- El problema mecánico

La forma integral de nuestro problema, obtenida mediante el método de los residuos ponderados, es:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^T (\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}) d\Omega + \int_{\Gamma} \overline{\mathbf{w}}^T (\mathbf{I}^T \boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{t}}) d\Gamma = 0 \quad (6.8)$$

Aplicamos integración por partes y el teorema de la divergencia de Green al primer término de la primera integral, es decir:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^T (\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}) d\Omega = - \int_{\Omega} (\mathbf{L} \mathbf{w})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T \mathbf{I}^T \boldsymbol{\sigma} d\Gamma \quad (6.9)$$

Y eligiendo las funciones de peso de modo que  $\bar{\mathbf{w}} = -\mathbf{w}$ , nos queda:

$$- \int_{\Omega} (\mathbf{L} \mathbf{w})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T \mathbf{I}^T \boldsymbol{\sigma} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \rho \mathbf{g} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T \mathbf{I}^T \boldsymbol{\sigma} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (6.10)$$

Simplificando el segundo término con el cuarto:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L} \mathbf{w})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \rho \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (6.11)$$

Si elegimos como funciones de peso ciertos incrementos de desplazamientos virtuales compatibles con las condiciones de contorno de nuestro problema,  $\mathbf{w} = \delta \mathbf{u}$ , la última expresión queda:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L} \delta \mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \rho \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (6.12)$$

Y teniendo en cuenta que  $\delta \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L} \delta \mathbf{u}$ , finalmente:

$$\int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\epsilon})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \rho \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (6.13)$$

Que no es más que la expresión del Principio de los Trabajos Virtuales.

## 6.3.- Funciones de forma



Las funciones de forma sirven para trasladar las incógnitas a los nodos del elemento, es decir, pasamos de tener como incógnita un campo de por ejemplo desplazamientos a tener como incógnita los desplazamientos en los nodos del elemento.

$$p \cong \mathbf{N}_p \bar{\mathbf{p}} \quad (6.14)$$

$$\mathbf{u} \cong \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{u}} \quad (6.15)$$

$\mathbf{u}$ : es el campo de desplazamientos en alguna porción del dominio (elemento).

$\mathbf{N}_u$ : es la función de forma elegida.

$\bar{\mathbf{u}}$ : es el vector de desplazamientos en los nodos del elemento.

$$\mathbf{w}^T = \mathbf{N}_u \quad (6.16)$$

$$\mathbf{B}^T = (\mathbf{L}\mathbf{w})^T = (\mathbf{L}\mathbf{N}_u)^T \quad (6.17)$$

$\mathbf{B}$ : es la matriz de derivadas de las funciones de forma que será utilizada posteriormente.

$\mathbf{L}$ : es un operador definido en el apartado NOTACION.

Una vez integrada, la relación tensión deformación puede expresarse como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^s) = \mathbf{C} \left( \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{m} \frac{p}{3K_t(p)} \right) \quad (6.18)$$

En esta expresión ya se ha tenido en cuenta que la tensión neta es igual a la tensión total y la expresión entre paréntesis representa la deformación neta.

Reemplazamos esta expresión en la obtenida para el problema mecánico:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{w})^T \mathbf{C} \left( \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{m} \frac{p}{3K_t^s(p)} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \rho \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (6.19)$$

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{w})^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{w})^T \mathbf{C} \mathbf{m} \frac{p}{3K_t^s(p)} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \rho \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (6.20)$$

Ahora bien la deformación es:  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{N}_u \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}$ , reemplazando esta igualdad y las funciones de forma obtenemos:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{3K_t^s(p)} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{m} \mathbf{N}_p \bar{p} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (6.21)$$

El primer miembro de esta ecuación representa las fuerzas internas en función de los desplazamientos nodales y la presión de poro ambas en los nodos:

$$\mathbf{P}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{3K_t^s(p)} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{m} \mathbf{N}_p \bar{p} d\Omega \quad (6.22)$$

Como se trata de un problema no lineal podemos definir las matrices de rigidez tangente siguientes:

$$\mathbf{K}_T \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbf{Q}_T \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{P}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{P}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})}{\partial \bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} \quad (6.23)$$

Siendo:

$$\mathbf{K}_T = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_T \mathbf{B} d\Omega \quad (6.24)$$

Y

$$\mathbf{Q}_T = - \int_{\Omega} \frac{1}{3K_t^s(p)} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega \quad (6.25)$$

Se ha escrito adrede el modulo volumétrico de succión en función de la presión de poro, además de escribir el subíndice  $t$ , que significa tangente, lo que denota la no linealidad de la relación.

Reemplazando llegamos a:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_T \mathbf{B} d\Omega \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} - \frac{1}{3} \int_{\Omega} \frac{1}{K_t^s} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (6.26)$$

Donde vemos que no se puede quitar fuera de la integral el modulo volumétrico de succión por ser función de la presión de poros y a su vez de la posición.

Y teniendo en cuenta la Discretización en elementos:

$$\mathbb{E} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_T \mathbf{B} d\Omega \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} - \frac{1}{3} \mathbb{E} \int_{\Omega^e} \frac{1}{K_t^s} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} = \mathbb{E} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{g} d\Omega + \mathbb{E} \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}_u^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (6.27)$$

Podemos resumir el problema escribiendo el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\mathbf{K}_T \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} - \mathbf{Q}_T \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} = \mathbf{f}^u \quad (6.28)$$

Vamos a imponer el campo de presiones de agua por lo cual podemos pasar el término correspondiente a la derecha del sistema de ecuaciones, con lo cual nos queda:

$$\mathbf{K}_T \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = \mathbf{f}^u + \mathbf{Q}_T \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} \quad (6.29)$$

Ó expresado como problema discretizado:

$$\mathbb{E}_e \mathbf{K}_T^{(e)} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = \mathbb{E}_e \mathbf{f}^{u(e)} + \mathbb{E}_e \mathbf{Q}_T^{(e)} \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} \quad (6.30)$$

Donde:

$$\mathbf{K}_T^{(e)} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_T \mathbf{B} d\Omega \quad (6.31)$$

$$\mathbf{Q}_T^{(e)} = \frac{1}{3} \int_{\Omega^e} \frac{1}{K_t^s} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega \quad (6.32)$$

$$\mathbf{f}^{u(e)} = \rho \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}_u^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (6.33)$$

Para el caso particular de análisis de contracción debido a aumentos de succión si despreciamos el peso propio del suelo y suponemos que no hay cargas a parte de la succión,  $\mathbf{f}^u = 0$ , quedando el problema reducido a :

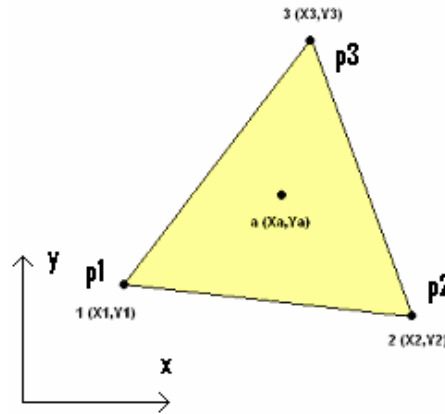
$$\mathbf{K}_T \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = \mathbf{Q}_T \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} \quad (6.34)$$

## 6.4.- Formulación “u-p” de elementos finitos para problema mecánico en suelos no saturados en 2 dimensiones

### 6.4.1.- Elementos

Se eligen elementos triangulares lineales para modelar el campo de presiones de poro y para modelar el campo de desplazamientos.

### 6.4.2.- Campo de presiones de poro de agua



**Figura 6.1** - Elemento triangular lineal. A cada nodo le corresponde un valor de presión

Presión de poros en los nodos del elemento:

$$\bar{\mathbf{p}} = [p_1 \quad p_2 \quad p_3]^T \quad (6.35)$$

Función de forma de la presión de poros:

$$\mathbf{N}_p = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \quad (6.36)$$

Aproximación del campo de presiones de poro mediante funciones de forma y valores nodales de presiones de poro:

$$p = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \quad (6.37)$$

Dentro del elemento la presión de poros se aproxima mediante una función polinómica lineal, es decir:

$$p(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y \quad (6.38)$$

Para obtener las constantes  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ , reemplazamos los valores de las coordenadas de los nodos, obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} p_1(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 \\ p_2(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2 \\ p_3(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x_3 + \alpha_2 y_3 \end{cases} \quad (6.39)$$

Resolviéndolo se obtiene:

$$p(x, y) = \frac{1}{2A} [(a_1 + b_1 x + c_1 y)p_1 + (a_2 + b_2 x + c_2 y)p_2 + (a_3 + b_3 x + c_3 y)p_3] \quad (6.40)$$

Donde:

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$b_i = y_j - y_k$$

$$c_i = x_k - x_j$$

Generalizando podemos escribir, las funciones de forma como:

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad \text{con } i = 1, 2, 3 \quad (6.41)$$

Donde A, es el área del elemento y se puede calcular como:

$$2A = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

Las derivadas de las funciones de forma quedan:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A} \quad (6.43)$$

Y

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{c_i}{2A} \quad (6.44)$$

Matriz gradiente de las funciones de forma de presiones de poro:

$$\nabla \mathbf{N}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

Operadores matriciales gradiente y divergencia, en 2D:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

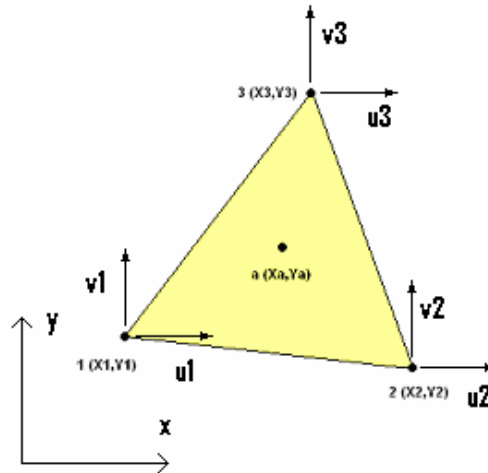
$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

### 6.4.3.- Campo de desplazamientos

En este caso hay dos grados de libertad por nodo, desplazamientos según x e y.

Desplazamientos en los nodos del elemento:

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{bmatrix}^T \quad (6.48)$$



**Figura 5.2.-** Elemento triangular lineal. A cada nodo le corresponden dos valores de desplazamientos  $u$  y  $v$

Función de forma de los desplazamientos:

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

Aproximación del campo de desplazamientos mediante las funciones de forma y los valores nodales de desplazamientos:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (6.50)$$

Matriz de derivadas de las funciones de forma de desplazamientos:

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} =$$



$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

Delta de Kronecker en notación matricial y 2D:

$$\mathbf{m} = [1 \quad 1 \quad 0]^T \quad (6.52)$$

Sistema de ecuaciones a resolver:

$$\mathbb{E} \mathbf{K}_T^{(e)} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = \mathbb{E} \mathbf{Q}_T^{(e)} \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} \quad (6.53)$$

Donde sacando las constantes fuera de la integral:

$$\mathbf{K}_T^{(e)} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_T \mathbf{B} d\Omega = \mathbf{B}^T \left[ \int_{\Omega^e} \mathbf{C}_T d\Omega \right] \mathbf{B} \quad (6.54)$$

$$\mathbf{K}_T^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \left\{ \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} K_t + \frac{4}{3} G_t & K_t - \frac{2}{3} G_t & 0 \\ K_t - \frac{2}{3} G_t & K_t + \frac{4}{3} G_t & 0 \\ 0 & 0 & G_t \end{bmatrix} d\Omega \right\} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

$$\mathbf{K}_T^{(e)} = \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_1 & b_1 \\ b_2 & 0 & c_2 \\ 0 & c_2 & b_2 \\ b_3 & 0 & c_3 \\ 0 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} K_t + \frac{4}{3}G_t & K_t - \frac{2}{3}G_t & 0 \\ K_t - \frac{2}{3}G_t & K_t + \frac{4}{3}G_t & 0 \\ 0 & 0 & G_t \end{bmatrix} d\Omega \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

La matriz de rigidez la podemos sacar de la integral porque imponemos la succión y conocemos su valor en cada instante, así:

$$\mathbf{K}_T^{(e)} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_1 & b_1 \\ b_2 & 0 & c_2 \\ 0 & c_2 & b_2 \\ b_3 & 0 & c_3 \\ 0 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_t + \frac{4}{3}G_t & K_t - \frac{2}{3}G_t & 0 \\ K_t - \frac{2}{3}G_t & K_t + \frac{4}{3}G_t & 0 \\ 0 & 0 & G_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

$$\mathbf{Q}_T^{(e)} = \frac{1}{3} \int_{\Omega^e} \frac{1}{K_t^s} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega \quad (6.58)$$

$$\mathbf{Q}_T^{(e)} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \int_{\Omega^e} \frac{1}{K_t^s} \begin{bmatrix} K_t + \frac{4}{3}G_t & K_t - \frac{2}{3}G_t & 0 \\ K_t - \frac{2}{3}G_t & K_t + \frac{4}{3}G_t & 0 \\ 0 & 0 & G_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [N_1 \quad N_2 \quad N_3] d\Omega \quad (6.59)$$

$$\mathbf{Q}_T^{(e)} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_1 & b_1 \\ b_2 & 0 & c_2 \\ 0 & c_2 & b_2 \\ b_3 & 0 & c_3 \\ 0 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \int_{\Omega^e} \frac{1}{K_t^s} \begin{bmatrix} K_t + \frac{4}{3}G_t & K_t - \frac{2}{3}G_t & 0 \\ K_t - \frac{2}{3}G_t & K_t + \frac{4}{3}G_t & 0 \\ 0 & 0 & G_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [N_1 \quad N_2 \quad N_3] d\Omega \quad (6.60)$$

Si bien es cierto que los módulos elásticos son tangentes, como imponemos la presión de poros como si fuera un dato, cada vez que calculemos estas integrales los módulos tendrán valores concretos. Por esta razón podemos considerar la posibilidad de sacar fuera de la integral a los módulos obteniendo:

$$\mathbf{Q}_T^{(e)} = \frac{1}{12A^2K_t^s} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_1 & b_1 \\ b_2 & 0 & c_2 \\ 0 & c_2 & b_2 \\ b_3 & 0 & c_3 \\ 0 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_t + \frac{4}{3}G_t & K_t - \frac{2}{3}G_t & 0 \\ K_t - \frac{2}{3}G_t & K_t + \frac{4}{3}G_t & 0 \\ 0 & 0 & G_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \int_{\Omega^e} N_1 d\Omega & \int_{\Omega^e} N_2 d\Omega & \int_{\Omega^e} N_3 d\Omega \end{bmatrix} \quad (6.61)$$

$$\text{Donde: } \int_{\Omega^e} N_i d\Omega = \int_{\Omega^e} (a_i + b_i x + c_i y) d\Omega = a_i A + b_i \frac{A}{12} (x_i + x_j + x_k) + c_i \frac{A}{12} (y_i + y_j + y_k)$$

Finalmente:

$$\mathbf{Q}_T^{(e)} = \frac{1}{12A^2K_t^s} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_1 & b_1 \\ b_2 & 0 & c_2 \\ 0 & c_2 & b_2 \\ b_3 & 0 & c_3 \\ 0 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_t + \frac{4}{3}G_t & K_t - \frac{2}{3}G_t & 0 \\ K_t - \frac{2}{3}G_t & K_t + \frac{4}{3}G_t & 0 \\ 0 & 0 & G_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.62)$$

$$\begin{bmatrix} a_1A + b_1 \frac{A}{12}(x_1 + x_2 + x_3) + c_1 \frac{A}{12}(y_1 + y_2 + y_3) \\ a_2A + b_2 \frac{A}{12}(x_2 + x_3 + x_1) + c_2 \frac{A}{12}(y_2 + y_3 + y_1) \\ a_3A + b_3 \frac{A}{12}(x_3 + x_1 + x_2) + c_3 \frac{A}{12}(y_3 + y_1 + y_2) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbb{E}_e \left\{ \left[ \mathbf{K}_T^{(e)} \right]_{6 \times 6} \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \right]_{6 \times 1} \right\} = \mathbb{E}_e \left\{ \left[ \mathbf{Q}_T^{(e)} \right]_{6 \times 3} \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} \right]_{3 \times 1} \right\} \quad (6.63)$$



# Capítulo 7

## RESULTADOS DEL MODELO IMPLEMENTADO

El comportamiento del suelo sometido a succión involucra una serie de mecanismos complejos que aún hoy no están del todo comprendidos. De todas formas puede decirse que entre otros factores dicho comportamiento depende de las condiciones de contorno, de la succión, que a su vez depende del grado de saturación y por lo tanto de la humedad, y de las condiciones internas del suelo dadas por la composición trifásica del mismo.

En este capítulo se muestran los resultados del modelo implementado para distintas condiciones de contorno en desplazamientos y variando los perfiles de succión.

Como la succión viene dada de resolver el problema hidráulico y en este trabajo este problema no se resuelve, la succión o presiones negativas de poro de agua para ser mas precisos en nuestro caso se imponen en todo momento.

Como este trabajo es parte de la investigación de grietas por desecación que se está realizando, los ensayos están enfocados hacia este tema.

Este capítulo esta dividido en dos partes, la primera expone los resultados del modelo utilizando elementos triangulares con funciones de forma lineales y el segundo con triángulos cuadráticos.

Se detallan a continuación una serie de resultados numéricos obtenidos con el modelo sobre una muestra de suelo con los siguientes valores de los parámetros característicos del suelo:

Módulo volumétrico del esqueleto de suelo  $K = 2$  [MPa], Módulo de corte del suelo  $G = 0.75$  [MPa], Módulo de Poisson  $\nu = 0.3$ .

El módulo volumétrico debido a succión  $K_s$  se lo toma como función lineal en cada elemento de la presión de poros de agua.

## 7.1.- Modelo con triángulos lineales

### 7.1.1.- Ensayo nº 1: Efecto de la succión creciente durante proceso de desecación en una muestra de suelo con restricción de movimiento en la base

Para este ejemplo se escoge una muestra de dimensiones 1m x 1m. Se supone que la succión en un perfil de suelo variará durante un proceso de desecación tal y como se muestra en la Figura 7.1. Hemos elegido desarrollar el proceso en 13 pasos de carga, el número de pasos es arbitrario y podría tomarse cualquier otro. La idea de ir a pasos es ver la evolución de la deformación con los sucesivos cambios en la succión.

Como solo disponemos del modelo numérico mecánico, el campo de succión en la muestra es totalmente impuesto. El valor de la succión en la muestra está dado por un proceso hidráulico que en este trabajo no se modela. Igualmente se intenta imponer unos valores de succión lo mas semejantes a la realidad para lo cual se supone que su variación solo depende de la altura de la muestra de suelo. Se utilizan dos tipos de incrementos a lo largo del proceso de desecación que quiere simularse. El primero se obtiene a través de una función potencial  $\Delta p = x^{20} - x$ , donde  $\Delta p$  es el incremento de presión de poro de agua y  $x$  es la altura de la muestra. En una segunda etapa, una vez alcanzada una distribución lineal de succión, los incrementos están dados por una función lineal  $\Delta p = x - b$  donde  $b$  es el máximo valor de la función incremento y que corresponde al valor sobre el eje vertical en la Figura 7.1. A Partir de aquí la succión va en aumento hasta alcanzar un valor constante en toda la muestra.

Como condición de contorno en desplazamientos hemos asumido que el borde inferior tiene los movimientos impedidos.

Dado que el problema se ha planteado para pequeñas deformaciones, se utiliza un factor de amplificación de las deformaciones igual a 100 para apreciar mejor los resultados.

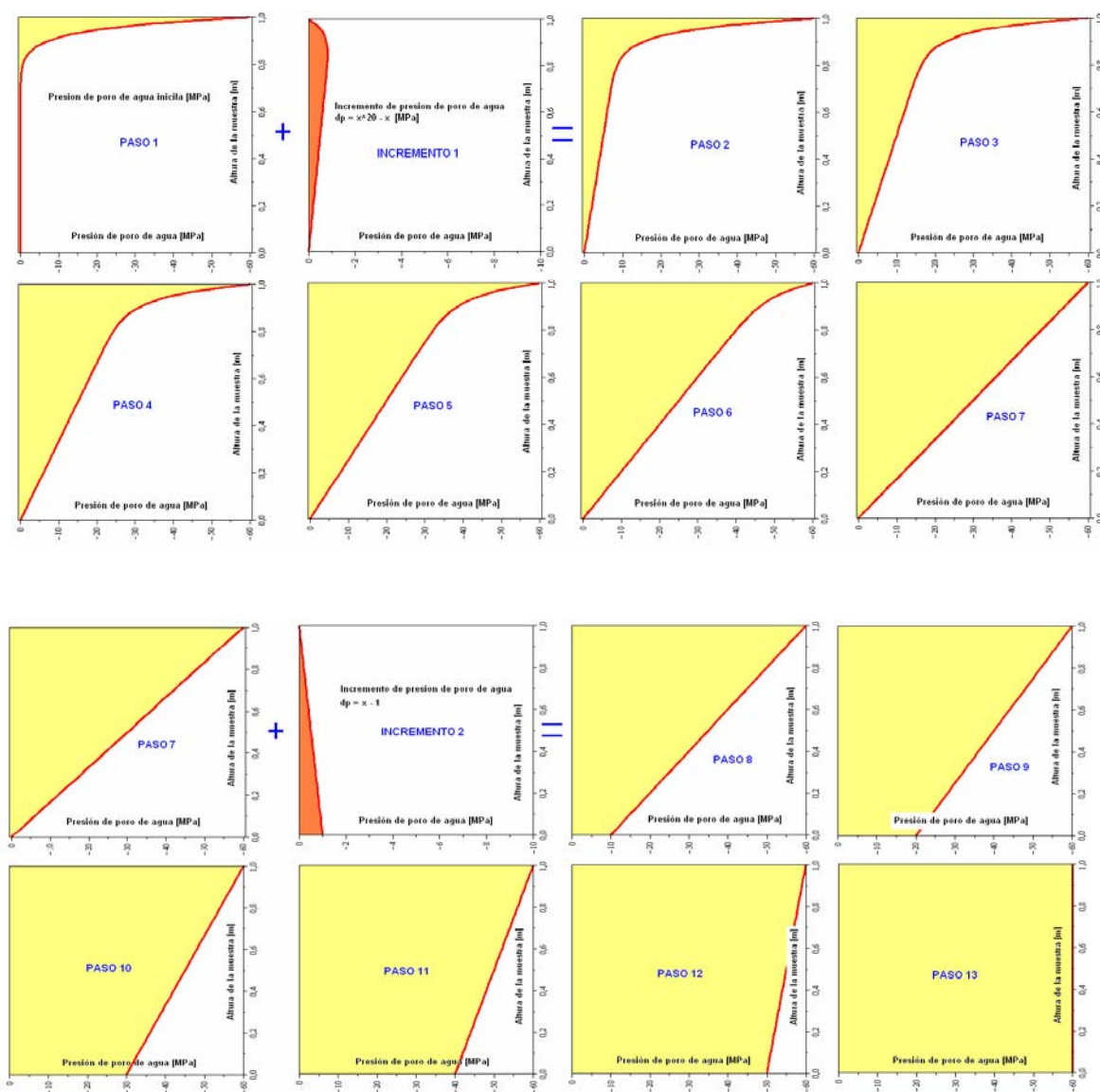


Figura 7.1 – Variación del perfil de succión

### 7.1.2.- Resultados del ensayo nº 1

Se muestran a continuación los resultados de algunos de los 13 pasos propuestos al principio ver Figuras 7.2a – 7.2e. En el primer paso, se ve como la distribución de succión provoca la expansión de la muestra en la zona superior. Sin embargo a medida que aumenta la succión se producen contracciones que es en general el comportamiento esperado. Sobre todo en las primeras etapas se observan valores de las tensiones de tracción elevados en la zona superior de la muestra que son los que producirán agrietamientos precisamente a partir de la superficie y que luego se propagarán hacia el interior del medio.



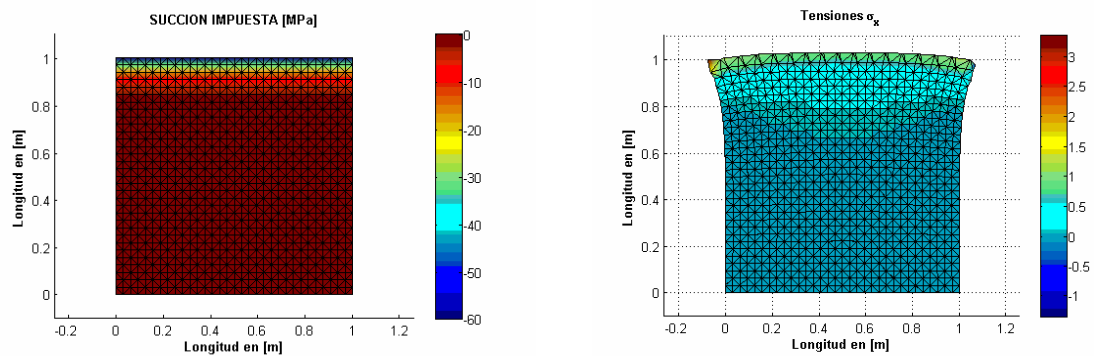


Figura 7.2a – Paso 1

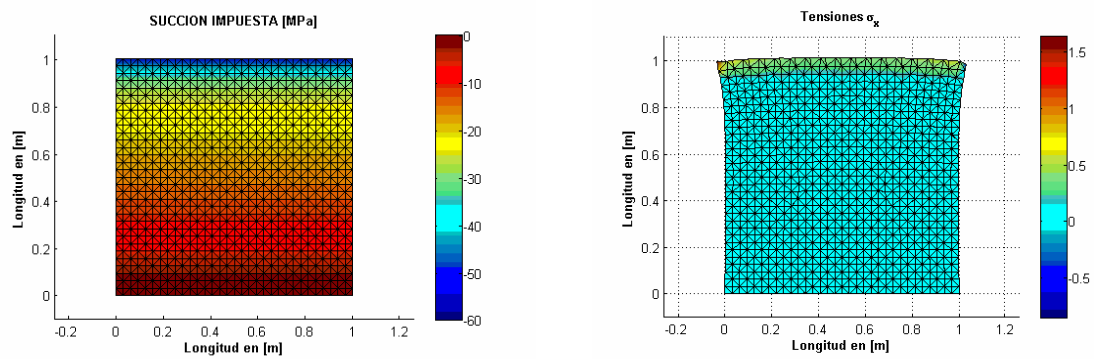


Figura 7.2b – Paso 4

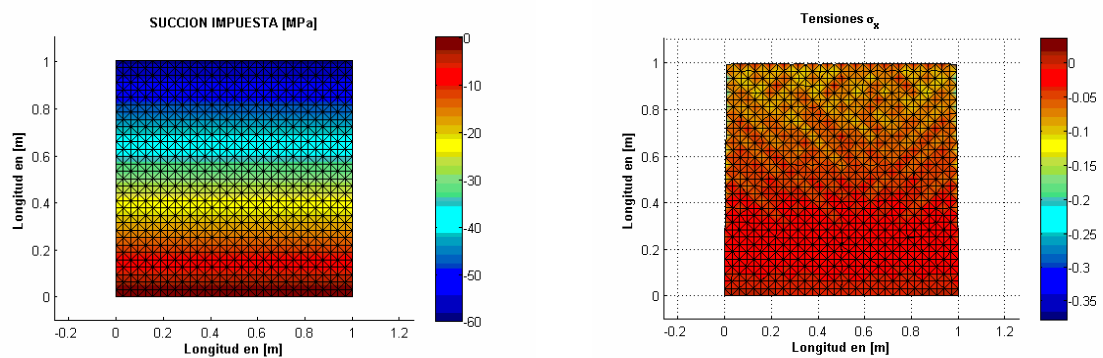


Figura 7.2c – Paso 7

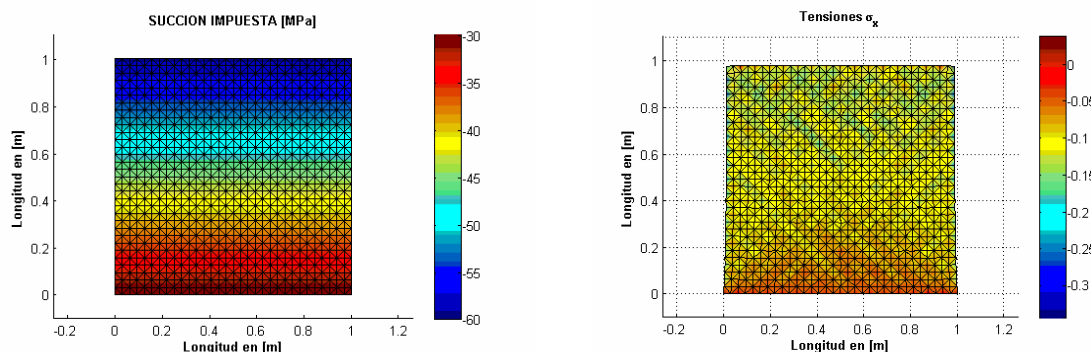


Figura 7.2d – Paso 10

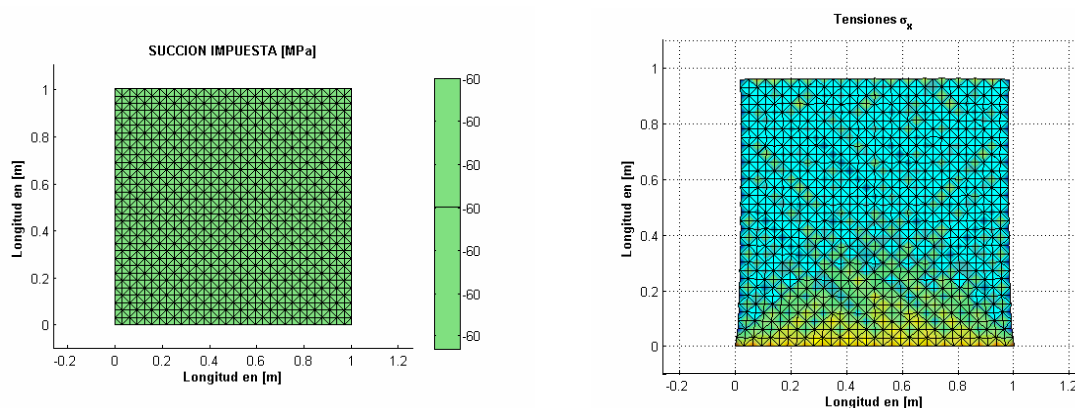


Figura 7.2e – Paso 13

### 7.1.3.- Ensayo nº 2: Efecto de la succión creciente durante proceso de desecación en una muestra de suelo con restricción de movimiento en la base y los laterales

En este caso el perfil de succión varía igual que en el caso anterior, el único cambio son las condiciones de contorno en desplazamientos, ahora los laterales solo pueden moverse en la dirección vertical. Este tipo de condición de contorno se parece mas a las condiciones de contorno in-situ en el terreno.

En este caso notamos al principio nuevamente un comportamiento de expansión que da paso posteriormente a la contracción característica. No se aprecian valores grandes de tensiones de tracción en este caso que puedan producir grietas. Quizás la razón de esto sea la excesiva homogeneidad de cargas y condiciones de contorno que evitan se produzcan gradientes suficientes en los campos de tensión.

## 7.1.4.- Resultados del ensayo nº 2

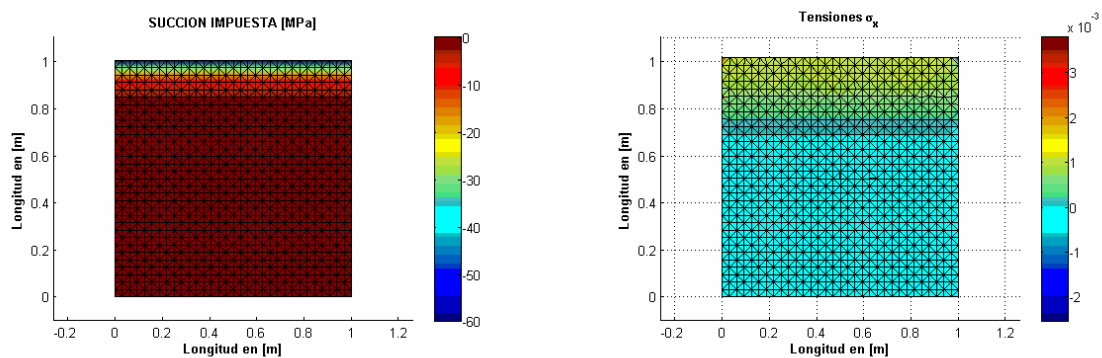


Figura 7.3a – Paso 1

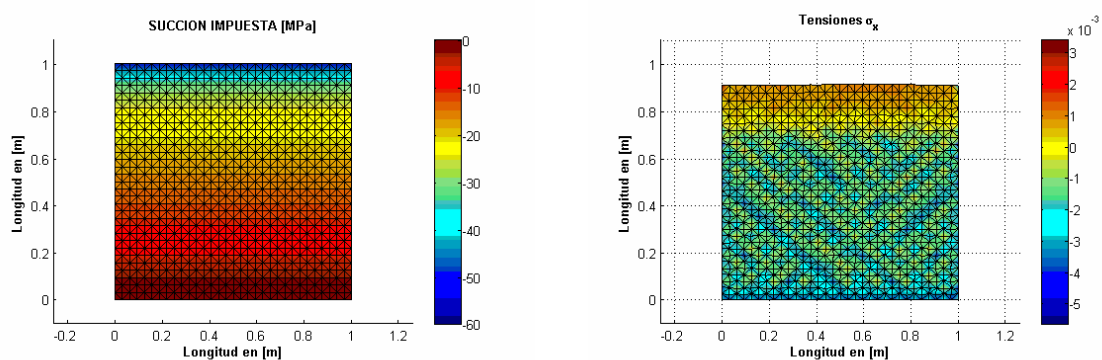


Figura 7.3b – Paso 4

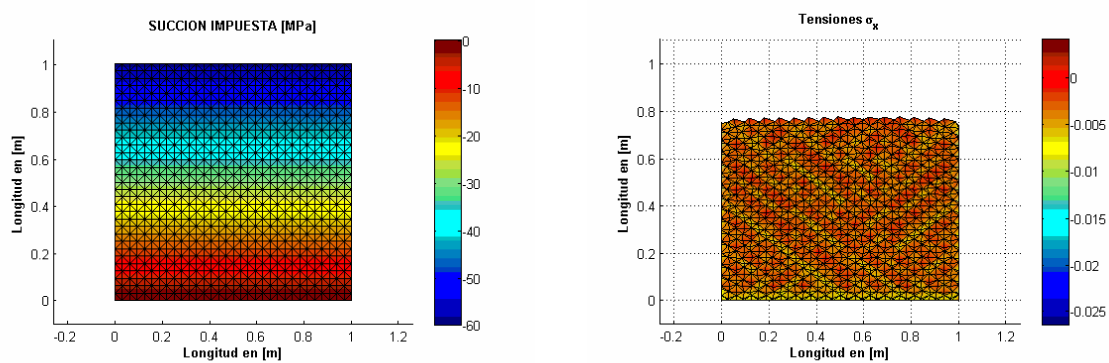


Figura 7.3c – Paso 7

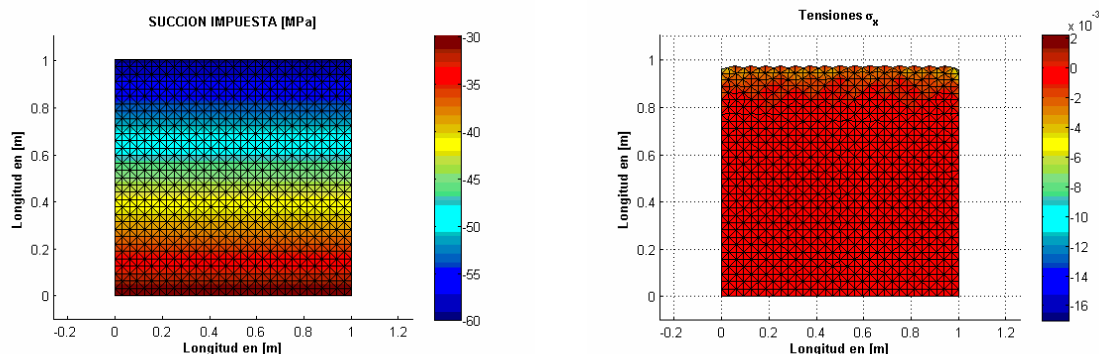


Figura 7.3d – Paso 10

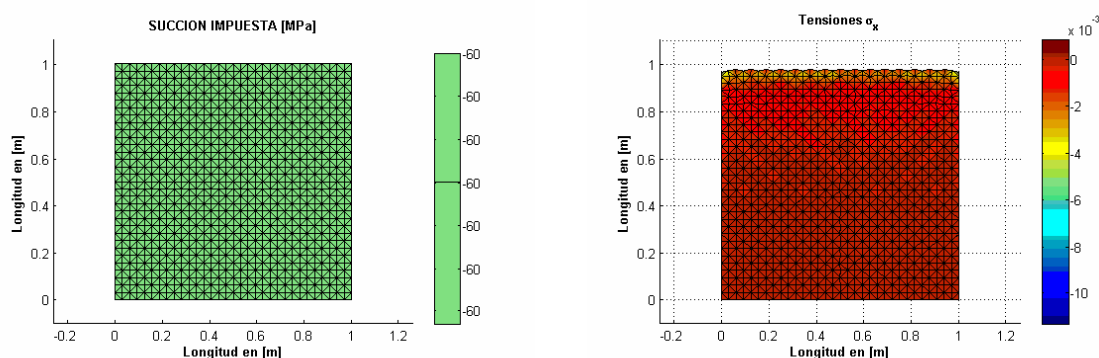


Figura 7.3e – Paso 13

### 7.1.5.- Ensayo nº 3: Efecto de la succión creciente durante proceso de desecación en una muestra de suelo con restricción de movimiento en el lateral izquierdo

En este caso llama la atención que al principio las tracciones se producen en la zona superior de la muestra para luego mostrar una contracción generalizada, seguida de tracciones en la zona inferior al final del ensayo.

Aunque pequeñas en todo momento se pueden apreciar tensiones de tracción que podrían generar agrietamientos.

### 7.1.6.- Resultados del ensayo nº 3

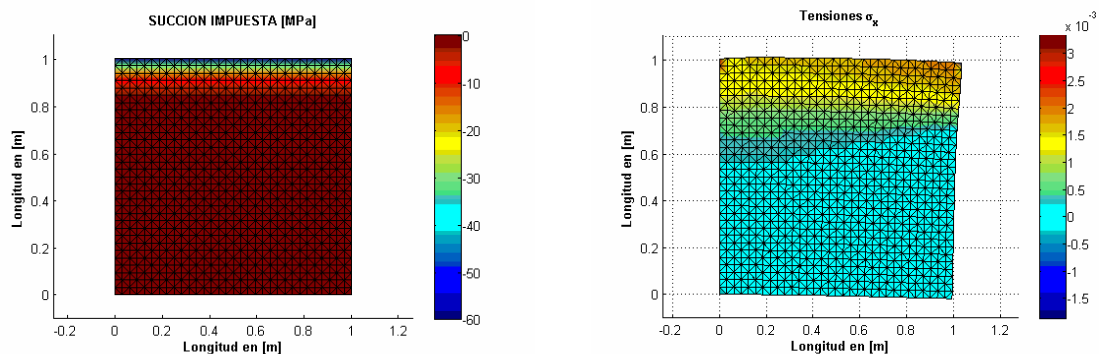


Figura 7.4a – Paso 1

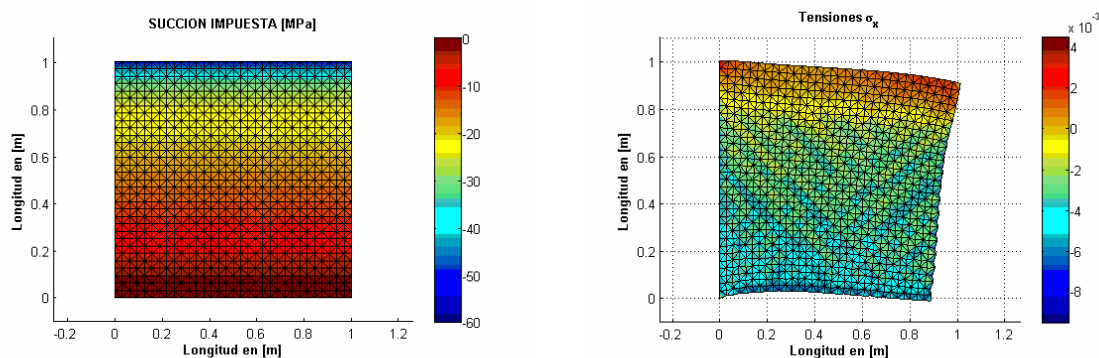


Figura 7.4b – Paso 4

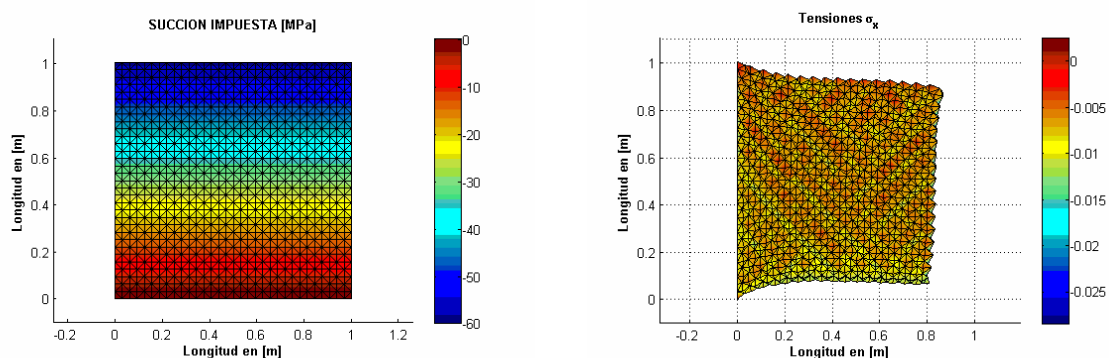


Figura 7.4c – Paso 7

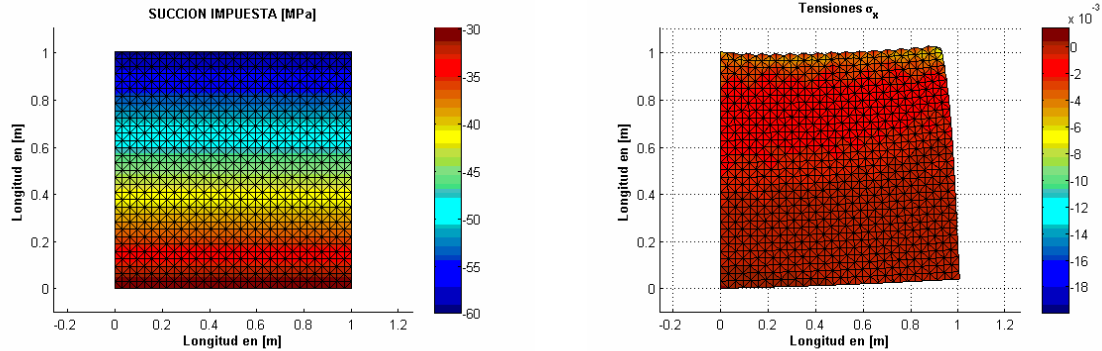


Figura 7.4d – Paso 10

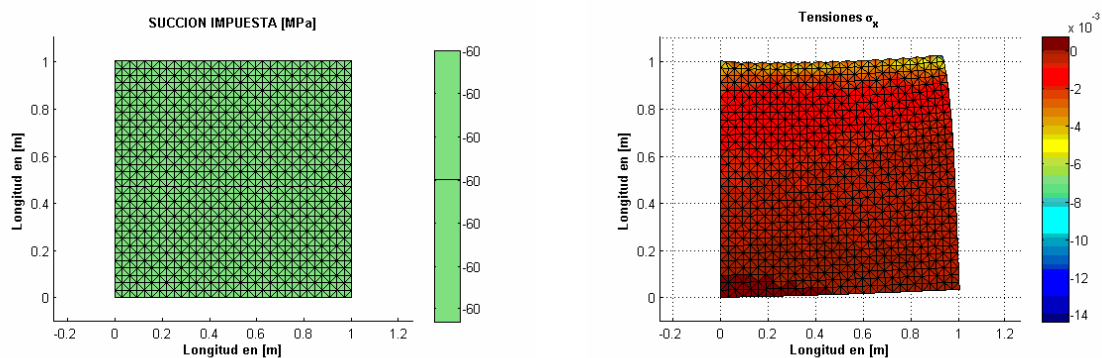


Figura 7.4e – Paso 13

### 7.1.7.- Ensayo nº 4: Análisis del agrietamiento en una muestra de suelo sometida a cambios de succión

La muestra de suelo es la esquematizada en la Figura 7.5 y esta sometida al perfil de succión mostrado en la misma Figura. Se han restringido los movimientos de la cara izquierda de la muestra. En la Figura 7.6 se muestran los diagramas de tensiones horizontales, verticales y tensiones principales de tracción y compresión. Vemos que  $\sigma_1 \equiv \sigma_x$  y que  $\sigma_2 \equiv \sigma_y$ , lo que coincide con la hipótesis comúnmente aceptada de que en este tipo de condiciones las tensiones verticales y horizontales son principales.



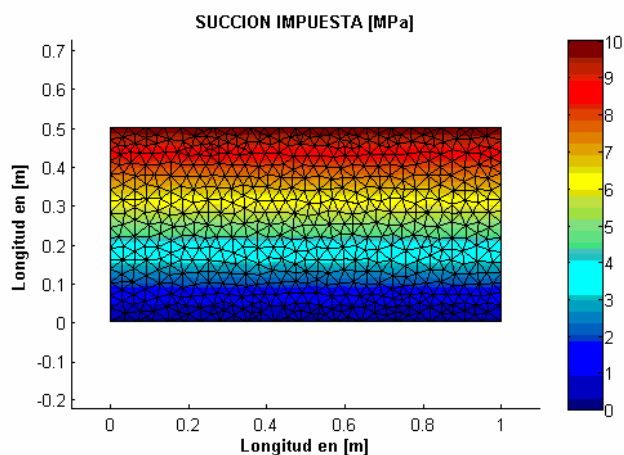


Figura 7.5 – Perfil de succión y geometría inicial

### 7.1.8.- Resultados del ensayo nº 4

Una vez aplicado el perfil de succión se obtiene del programa como resultado los siguientes campos de tensiones, según se muestra en la Figura 7.6

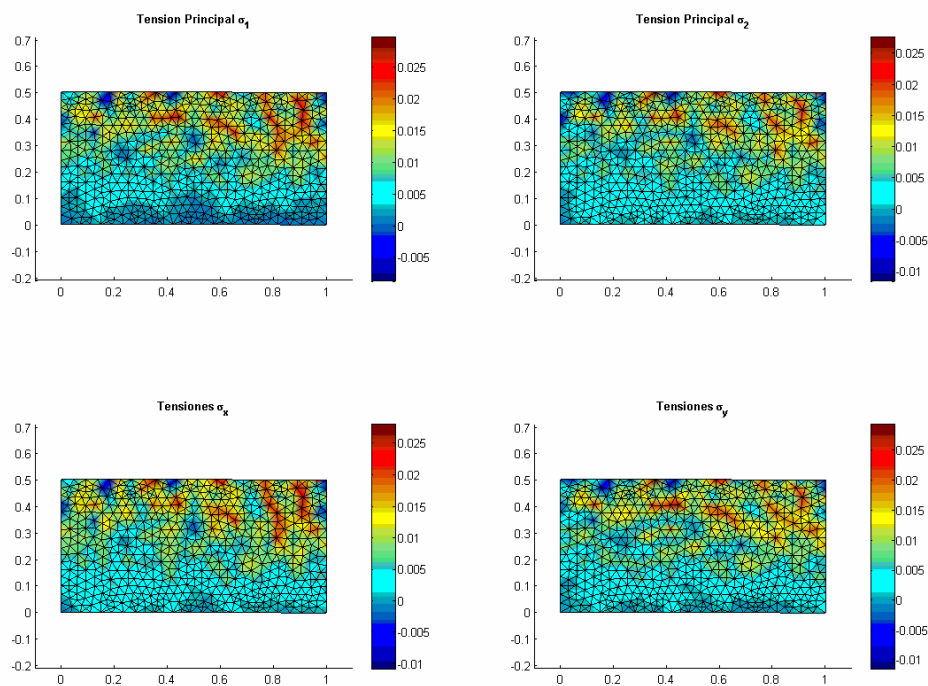
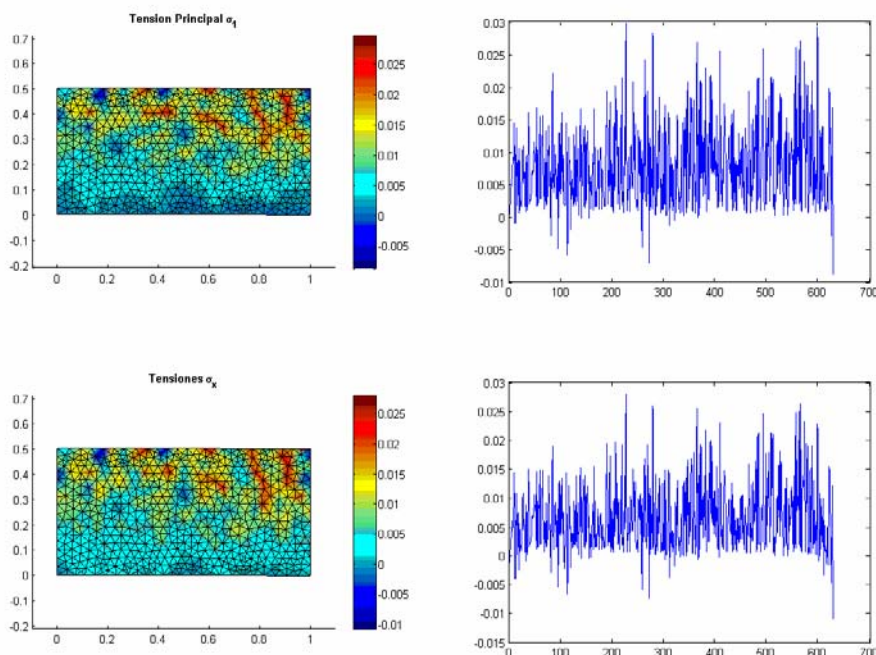


Figura 7.6 – Tensiones en la muestra



**Figura 7.7** – Tensiones máximas de tracción

En la Figura 7.7 se muestran los valores de tensión de tracción en los nodos de los elementos, si consideramos que en los picos hay mayor probabilidad de que se alcance la resistencia a tracción del suelo, podríamos estimar la configuración de grietas que se producirían en la muestra tal y como se muestra en la Figura 7.9. Es preciso aclarar que este tipo de predicción es muy aproximada por varios motivos. En primer lugar el proceso de desecación es un proceso que demanda tiempo (días) mientras que aquí se hace un análisis lineal instantáneo. Por otro lado a cada paso de tiempo la configuración de grietas irá cambiando lo que influirá en el estado de tensiones del medio y este a su vez modificará la configuración de las grietas. Sin embargo lo que se busca con este y otros ensayos es comprobar que el efecto de la variación de la succión en la masa de suelo puede producir los agrietamientos. Esto queda reflejado en los resultados obtenidos a través del modelo implementado.



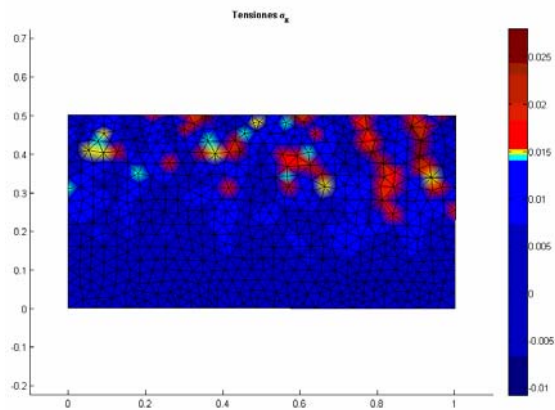


Figura 7.8 – Configuración de tensiones

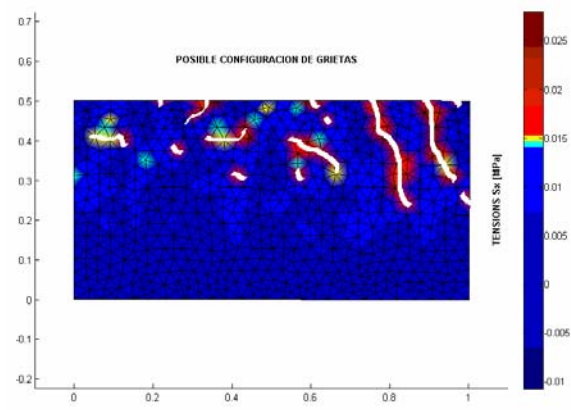


Figura 7.9 – Configuración de grietas

### 7.1.9.- Ensayo nº 5: Análisis del agrietamiento en una muestra de suelo sometida a cambios de succión

La desecación y el agrietamiento en suelos es un proceso tridimensional. Con nuestro modelo 2D podemos simular procesos en secciones verticales y horizontales.

Para modelar este último caso es preciso imponer como condición de contorno en desplazamientos la restricción de movimientos en las cuatro caras de la muestra. Este análisis sería como observar el proceso desde arriba en una muestra rectangular de suelo sometido a desecación.

Se muestra en la Figura 7.10 una bandeja donde se ensaya en laboratorio un proceso de desecación similar al que simulamos aquí.



Figura 7.10 – Bandeja con suelo agrietado

## 7.1.10.- Resultados del ensayo nº 5

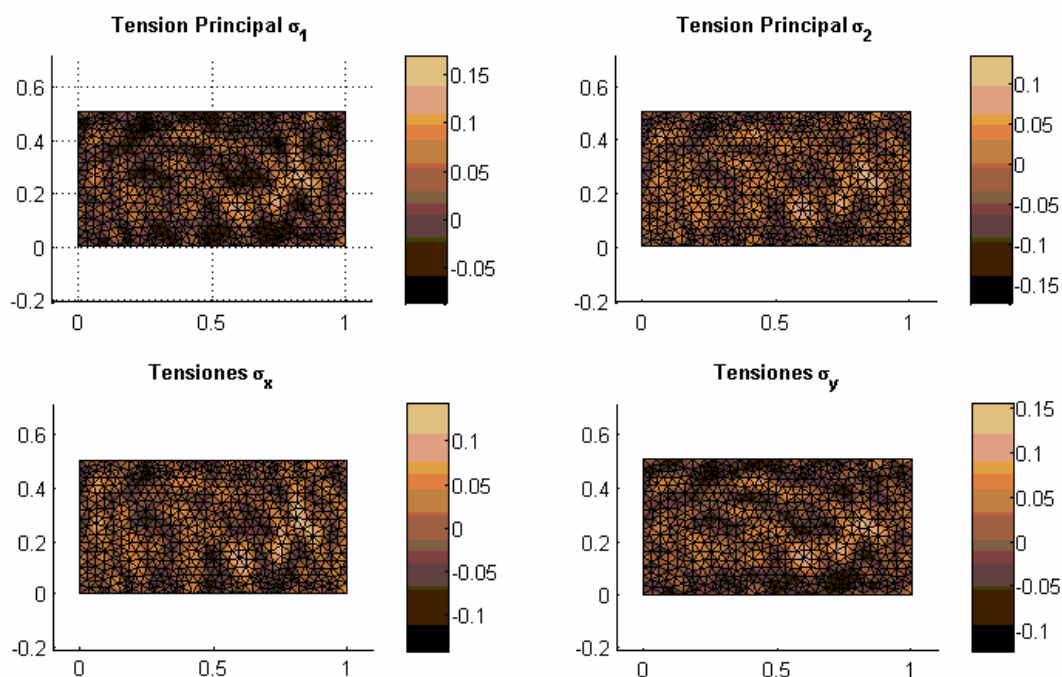


Figura 7.11 – Configuración de tensiones

En las Figuras 7.11 y 7.12 se muestran de nuevo los diagramas de tensiones que son los que nos guían en la predicción del agrietamiento. Siguiendo precisamente estas pautas podemos predecir que el agrietamiento en este ensayo podría tener el aspecto mostrado en la Figura 7.13.

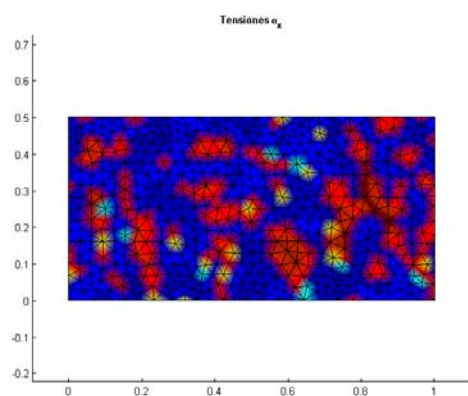


Figura 7.12 - Configuración de tensiones

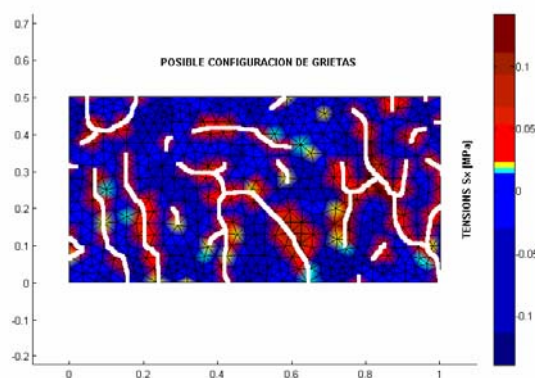


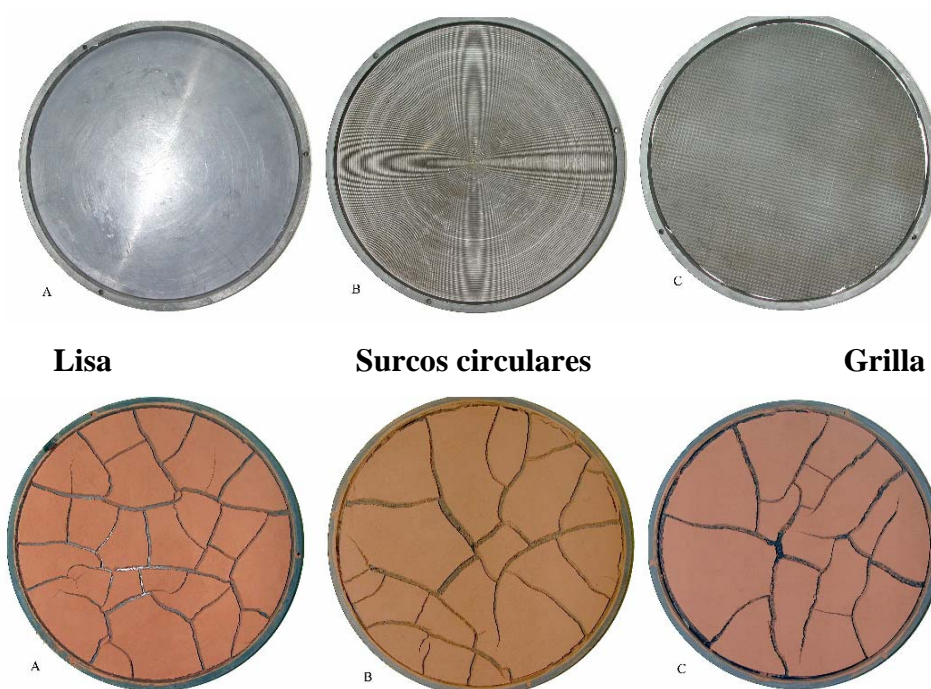
Figura 7.13 - Configuración de grietas

## 7.2.- Modelo con triángulos cuadráticos

En este apartado se muestran los resultados de simulaciones con un modelo que utiliza elementos triangulares con funciones de forma cuadráticas. Para cada ensayo se trabaja con dos tipos de succiones impuestas, en el primer caso valores de succión constantes en todos los nodos de la malla y con incrementos también constantes y en el segundo variaciones de succión que van dando un perfil tipo función potencial que se supone se parece mas a la realidad. Respecto de las condiciones de contorno se fijan de tres tipos, la primera se deja que la muestra se comprima libremente bajo el efecto de la succión, en el segundo caso se restringen los movimientos en la base de la muestra y finalmente se restringe parcialmente dichos movimientos.

Las diferentes condiciones de contorno se eligen de esta forma para ver en que grado estas afectan al comportamiento de la muestra bajo la acción de la succión.

En el laboratorio estas condiciones de contorno se pueden aplicar utilizando bandejas con o sin rugosidades en sus fondos como se muestra en la Figura 7.14:



**Figura 7.15** – Diferentes texturas en los moldes de las muestras

### 7.2.1.- Ensayo nº 6: Contracción de muestra cuadrada bajo incrementos constantes de succión

En este caso se somete a una muestra de suelo cuadrada de 1m x 1m a cambios de succión constantes en cada nodo. La succión se aplica en 10 incrementos de 6 MPa hasta alcanzar el máximo valor de 60 MPa. Este valor es que el impondría la atmósfera de un ensayo realizado bajo condiciones controladas en laboratorio (temperatura  $21\pm 0.5^{\circ}\text{C}$ , humedad relativa  $52\pm 2^{\circ}\text{C}$ , contenido de humedad inicial  $27\pm 2^{\circ}\text{C}$ ).

### 7.2.2.- Resultados del ensayo nº 6

En las Figuras 7.16 y 7.17 puede verse el resultado para las primeras condiciones de contorno. Se ve como la muestra contrae sin restricción y se ve como evoluciona la succión en 10 pasos.

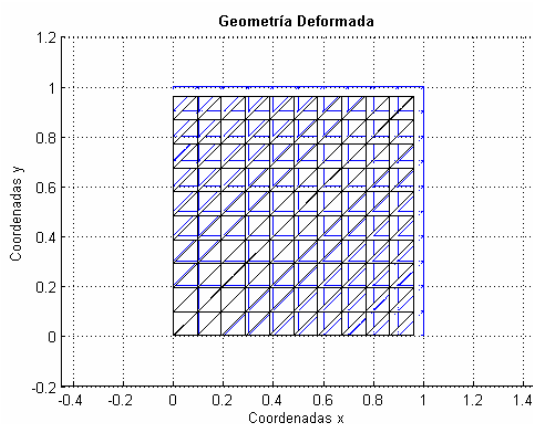


Figura 7.16 - Deformación

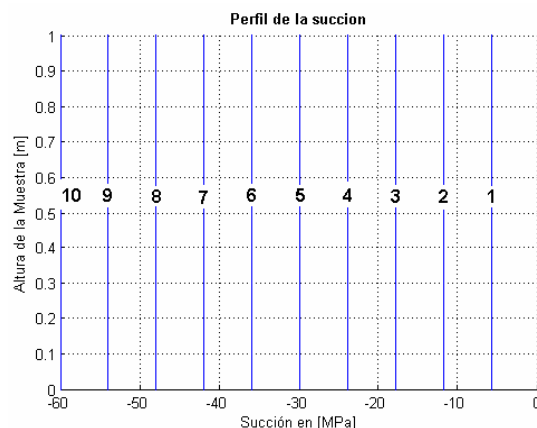


Figura 7.17 – Variación de succión

### 7.2.3.- Ensayo nº 7: Contracción de muestra cuadrada bajo incrementos constantes de succión

En este caso se restringen los movimientos de la base de la muestra. Este hecho hace que aparezcan tensiones de tracción en la base como puede verse en la Figura E.7b, lo que favorecerá a la aparición de grietas en dicha zona. En la realidad esta condición de contorno está dada por el contacto del suelo consigo mismo o en una bandeja en el laboratorio cuando esta cuenta con algún estriado en la base.

## 7.2.4.- Resultados del ensayo nº 7

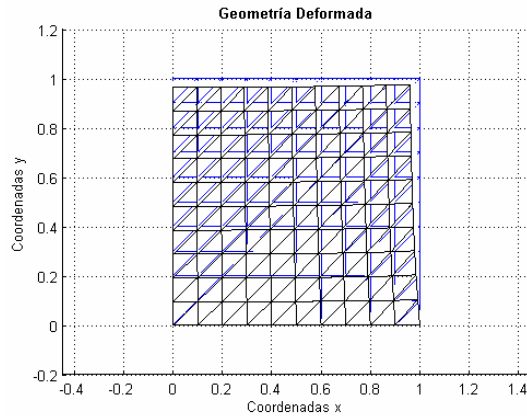


Figura 7.18 – Deformación

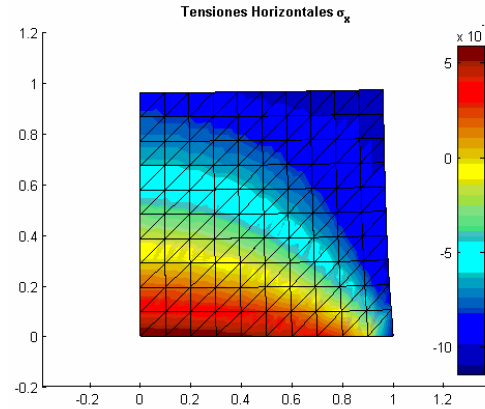


Figura 7.19 – Tensiones horizontales

## 7.2.5.- Ensayo nº 8: Contracción de muestra cuadrada bajo incrementos constantes de succión

Para este caso se ha dejado sin restricciones una parte de la base de la muestra y puede verse como al contraerse el suelo se levanta. En la zona donde hay restricciones se ven tensiones de tracción mientras que la zona que puede moverse libremente está comprimida por la succión. Este levantamiento es característico y recibe el nombre de “curling” en inglés, es un rizado característico de la desecación en suelos arcillosos.

## 7.2.6.- Resultados del ensayo nº 8

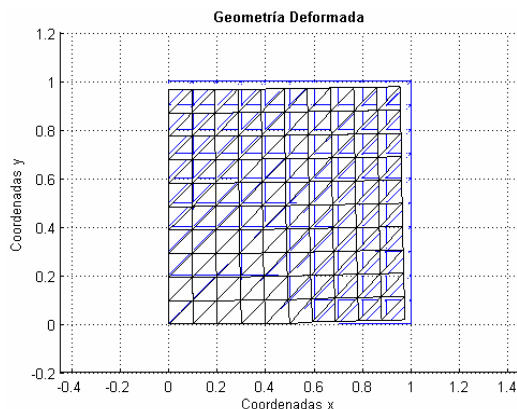


Figura 7.20 - Deformación

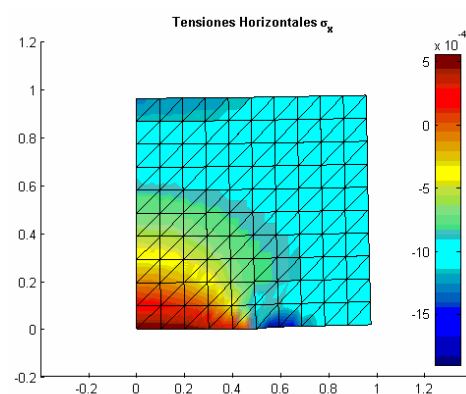


Figura 7.21 – Tensiones horizontales



### 7.2.7.- Ensayo nº 9: Contracción de muestra cuadrada bajo incrementos variables de succión

Ensayamos otra vez la misma muestra pero ahora aplicando una función de succión mas parecida a la que se darían en la realidad. Vemos como el comportamiento es diferente al caso anterior en varios sentidos. En el primer caso de condiciones de contorno se ve una deformación algo diferente como así también un campo de tensiones distinto. Esto obviamente obedece a que la succión ahora no es uniforme.

En las Figuras de abajo se ven las deformaciones así como también los perfiles de succión impuestas en 10 pasos a lo largo de la simulación. Sería deseable que los incrementos de succión fueran más uniformes, lo cual se logra en cierta medida utilizando mayor número de pasos de carga. Sin embargo en este trabajo donde solo se pretende hacer una aproximación cualitativa al problema es suficiente con el esquema adoptado. Todo refinamiento se deja para futuros trabajos que formarán parte de una tesis doctoral.

### 7.2.8.- Resultados del ensayo nº 9

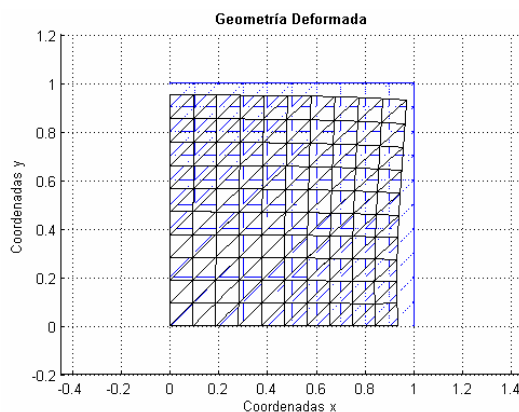


Figura 7.22 – Deformación final

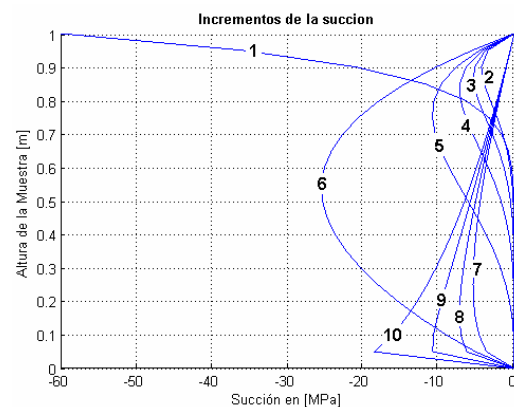


Figura 7.23 – Incrementos de succión

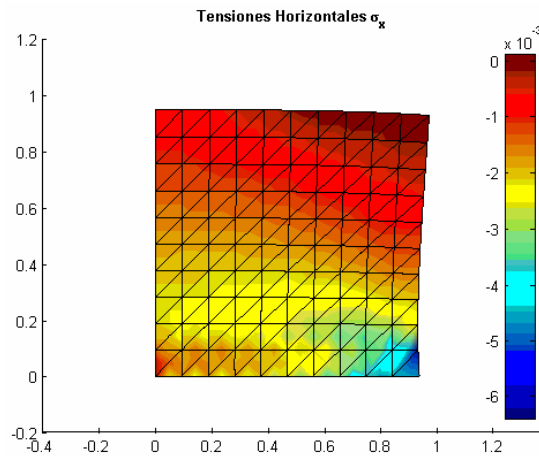


Figura 7.24 – Tensiones horizontales

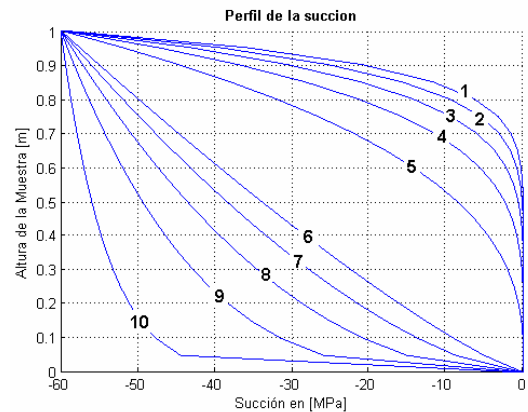


Figura 7.25 – Perfil de succión aplicada

### 7.2.9.- Ensayo n° 10: Contracción de muestra cuadrada bajo incrementos variables de succión

Nuevamente se restringen los movimientos en la base de la muestra. Aunque el resultado es diferente al caso de succión uniforme, lo importante es que las restricciones generan tensiones de tracción en la zona baja de la muestra lo que generará seguramente agrietamientos.

### 7.2.10.- Resultados del ensayo n° 10

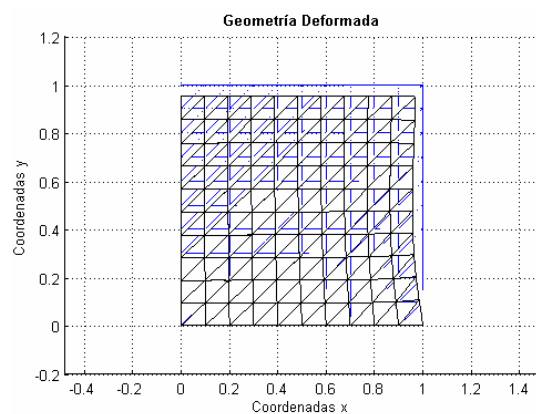


Figura 7.26 – Deformaciones finales

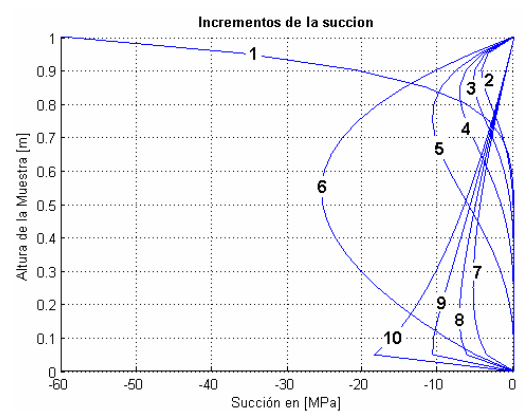


Figura 7.27 – Incrementos de succión

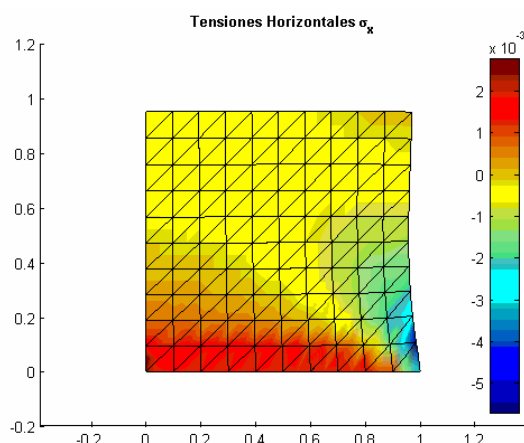


Figura 7.28 – Tensiones horizontales

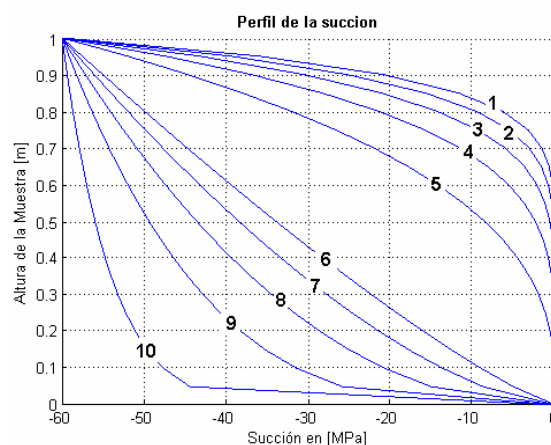


Figura 7.29 – Perfil de succión

### 7.2.11.- Ensayo nº 11: Contracción de muestra cuadrada bajo incrementos variables de succión

Una vez más puede verse el efecto de levantamiento para este caso de condición de contorno.

### 7.2.12.- Resultados del ensayo nº 11

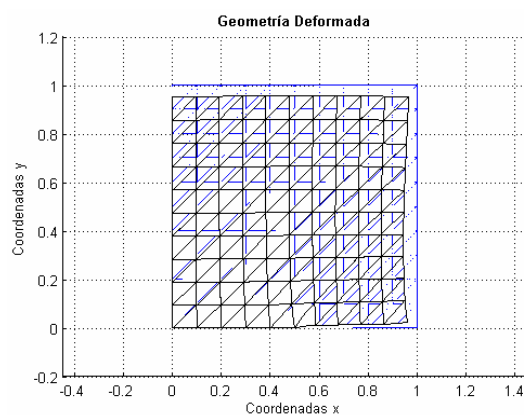


Figura 7.30 – Deformada final

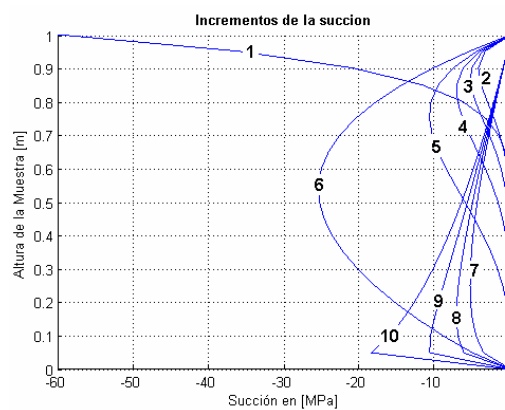


Figura 7.31 – Incrementos de succión



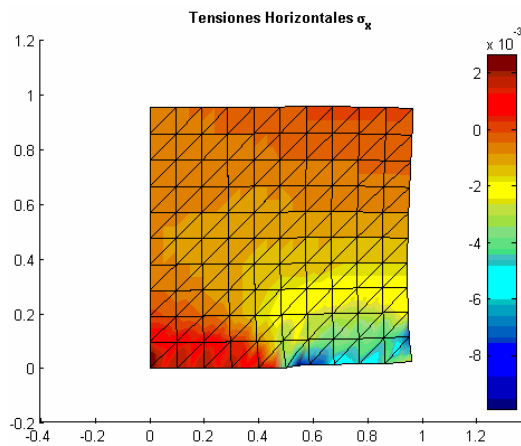


Figura 7.32 – Tensiones horizontales

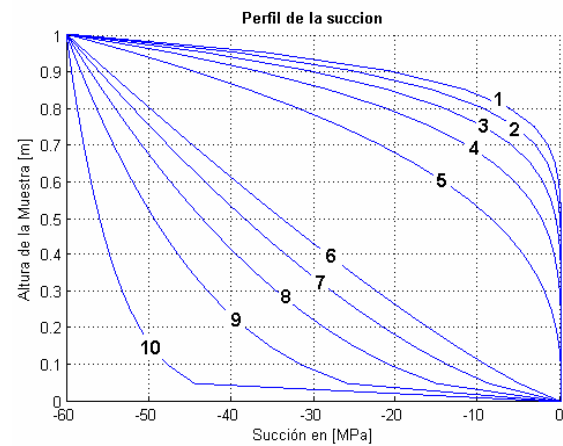


Figura 7.33 – Perfil de succión

### 7.2.13.- Ensayo nº 12: Contracción de muestra rectangular bajo incrementos constantes de succión

Finalmente en este ensayo se muestran las mismas consecuencias de las condiciones de contorno para muestras de diferentes tamaños sometidas a variaciones constantes de succión en todos los nodos de la malla de elementos finitos.

### 7.2.14.- Resultados del ensayo nº 12

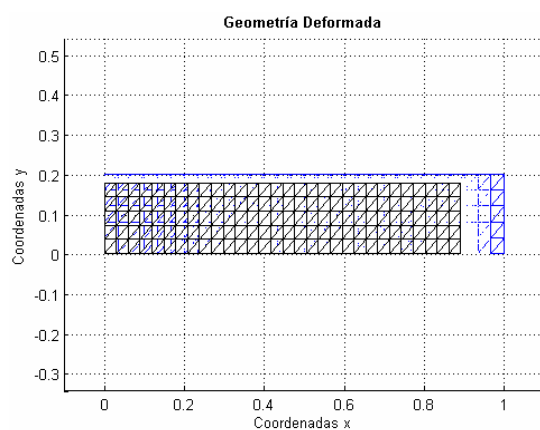


Figura 7.34 – Deformada final

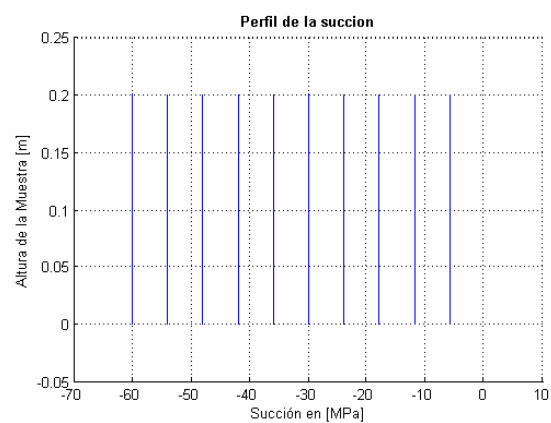


Figura 7.35 – Incrementos de succión

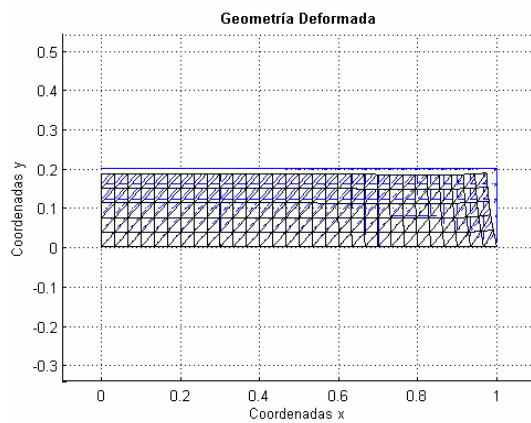


Figura 7.36 – Deformada final

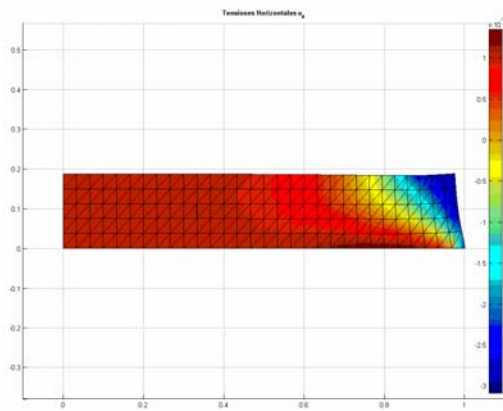


Figura 7.37 – Tensiones horizontales

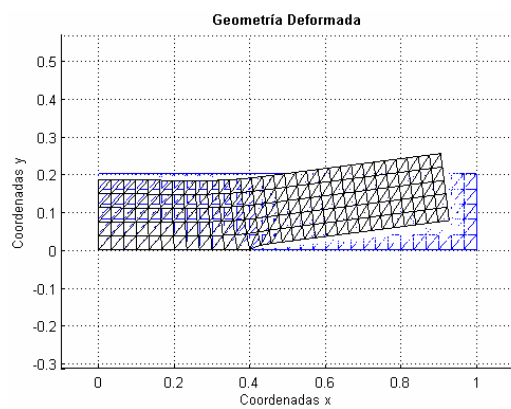


Figura 7.38 – Deformada final

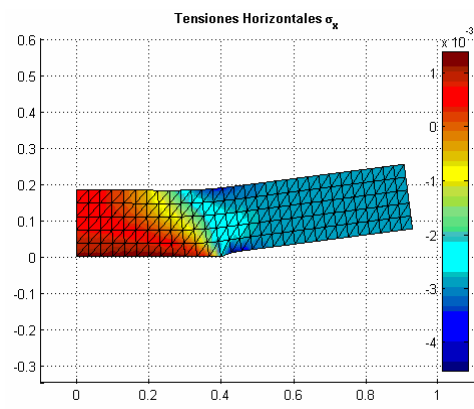


Figura 7.39 – Tensiones horizontales

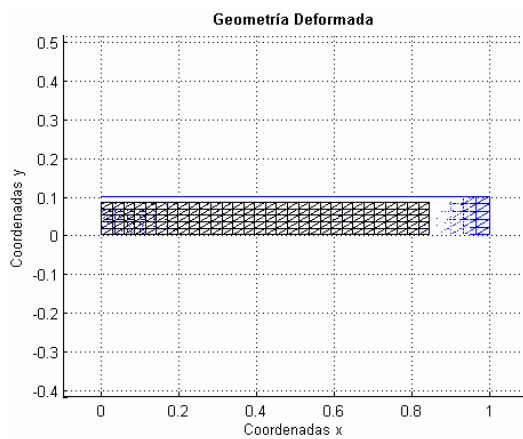


Figura 7.40 – Deformada final

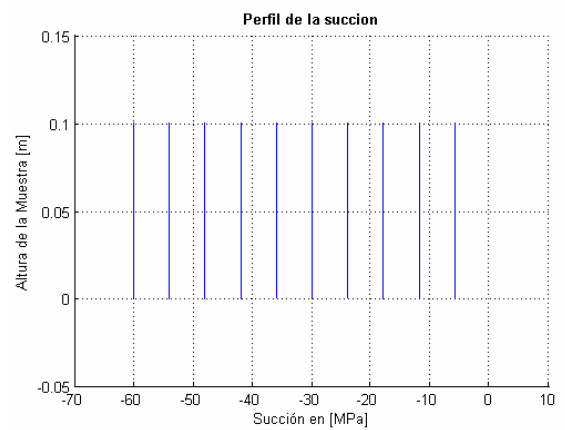


Figura 7.41 – Incrementos de succión

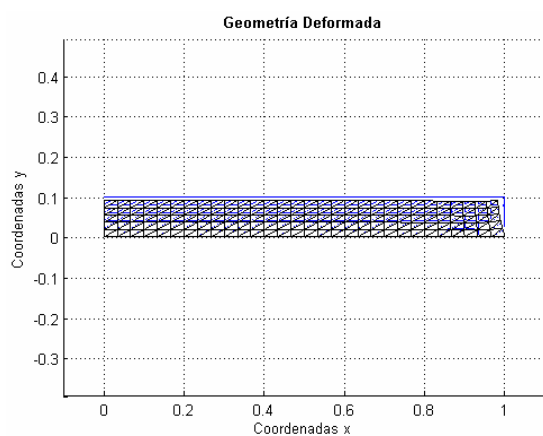


Figura 7.42 – Deformada final

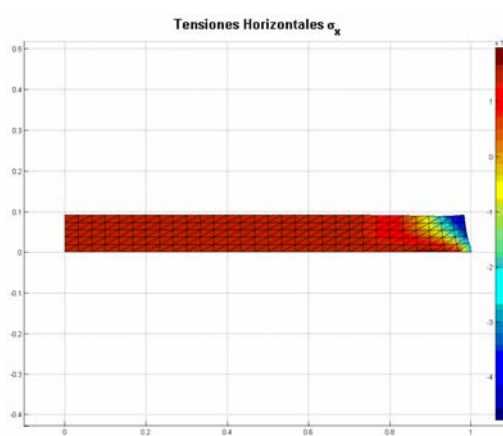


Figura 7.43 – Tensiones horizontales

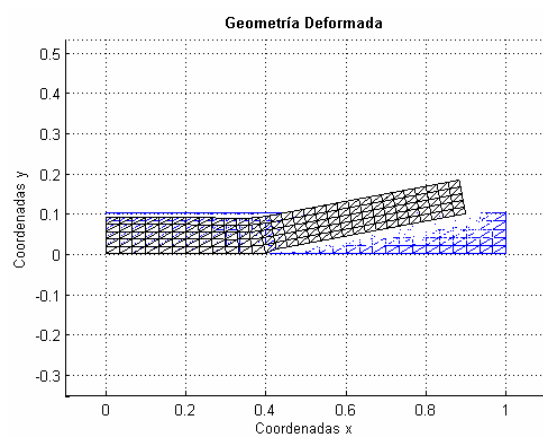


Figura 7.44 – Deformada final

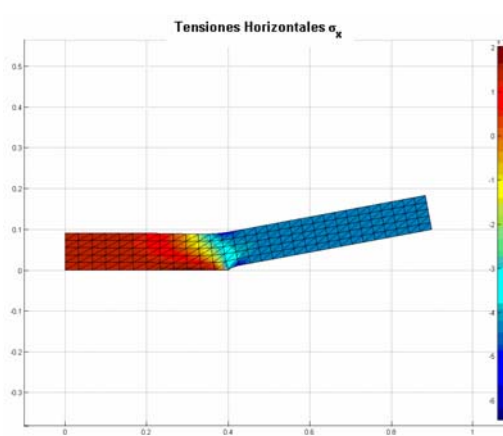


Figura 7.45 – Tensiones horizontales

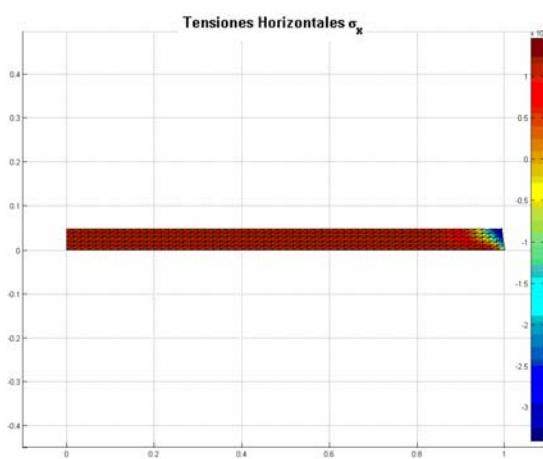


Figura 7.46 – Deformada final

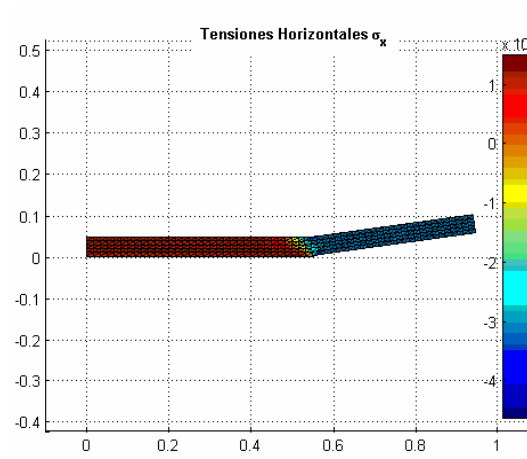


Figura 7.47 – Tensiones horizontales

# Capítulo 8

## LO QUE QUEDA POR HACER

Actualmente el autor de esta tesina de master está trabajando en su tesis doctoral. El tema de esta tesis es el estudio de los mecanismos de formación y propagación de las grietas por desecación en suelos.

La tesina de master es un primer acercamiento al problema utilizando un modelo mecánico elástico lineal. Para la tesis doctoral se espera poder implementar un código basado en el MEF que abarque el problema hidromecánico e implemente mecánica de fractura elástica lineal para estudiar el proceso de inicio y propagación de las fisuras.

### 8.1.- Idea global

Para resolver el problema de desecación, formación y propagación de grietas en suelos cohesivos blandos, objeto de la continuidad de esta tesina se debe tener claro todos los componentes necesarios para lograrlo.

En primer lugar el problema de desecación es un problema de flujo (pérdida de humedad) y de deformación (problema mecánico) que debería en lo posible considerarse acoplado debido a la interrelación entre parámetros de ambos modelos. Esto conlleva la formulación e implementación de un modelo hidromecánico acoplado en medios porosos no saturados. El principal inconveniente de este problema es la gran no linealidad que presenta.

Por otro lado necesitamos detectar el lugar y momentos donde se producen o inician las grietas en el suelo y además debemos ser capaces de seguir su evolución con el tiempo. Esto nos lleva a la necesidad de plantear un problema de mecánica de fractura que por simplicidad en un primer momento será elástico lineal.

Como utilizamos el método de los elementos finitos para implementar el problema hidromecánico y el problema de fractura, aparece el problema de capturar en cada momento los cambios en la geometría del problema. Esto deriva en la necesidad de adaptar la malla del método cuantas veces sea necesario por lo que necesitaremos algún software capaz de adaptar dicha malla a la aparición de nuevas grietas.

El hecho de adaptar mallas a nuevas geometrías trae como consecuencia la necesidad de exportar datos de viejas a nuevas mallas, es decir, actualización de datos entre mallados.

Está claro que estamos ante un problema complejo. Para aclarar ideas es bueno expresar todo el conjunto en el diagrama de flujo de la Figura 8.1.

Los pasos principales a seguir en el programa y que se muestran en el diagrama de flujo de la figura 7.1 son esquemáticamente los siguientes:

- (1) Dado un incremento de tiempo se realiza el análisis hidromecánico para suelo no saturado con el cual se obtienen los campos de tensiones y deformaciones discretizados en los nodos de la malla. Con estos datos podemos predecir los puntos donde se iniciarán las primeras fisuras. Si no hay puntos donde se iniciarán fisuras se avanza un paso de tiempo.
- (2) Cuando en un punto de la malla se alcanza la condición de inicio de fisura, se identifica este punto y se procede a desdoblar dicho nodo en dos. En estos puntos se calculan los factores de intensidad de tensiones. Y con estos se determinan si las grietas se propagarán y en que dirección de acuerdo al criterio de fractura en modo I.
- (3) Si alguna de las grietas se propaga, se extiende dicha grieta tentativamente un valor predefinido por el usuario.
- (4) Se ejecuta el remallado en la malla del paso de tiempo anterior  $i-1$ , para extender la grieta en la dirección predicha.
- (5) Se procede a la renumeración de los nodos de la malla para evitar aumentar el perfil del sistema de ecuaciones global. Se trasladan los datos de la vieja malla a la nueva.
- (6) Se aplica un nuevo paso de tiempo.
- (7) Los pasos de 1 a 6 se repiten de manera iterativa y para cada paso de tiempo, se va perfeccionando la longitud de la grieta usando un algoritmo predictor-corrector. Este proceso continúa hasta logra convergencia es decir que en la actual predicción no hay diferencias significativas con la siguiente.
- (8) Una vez que se obtiene la convergencia, los datos geométricos y las variables de estado asociados al incremento  $i$  se almacenan para su uso en un paso posterior.
- (9) Se aplica un nuevo incremento temporal  $i+1$  y se repite el proceso de 1 a 9 hasta completar el análisis.

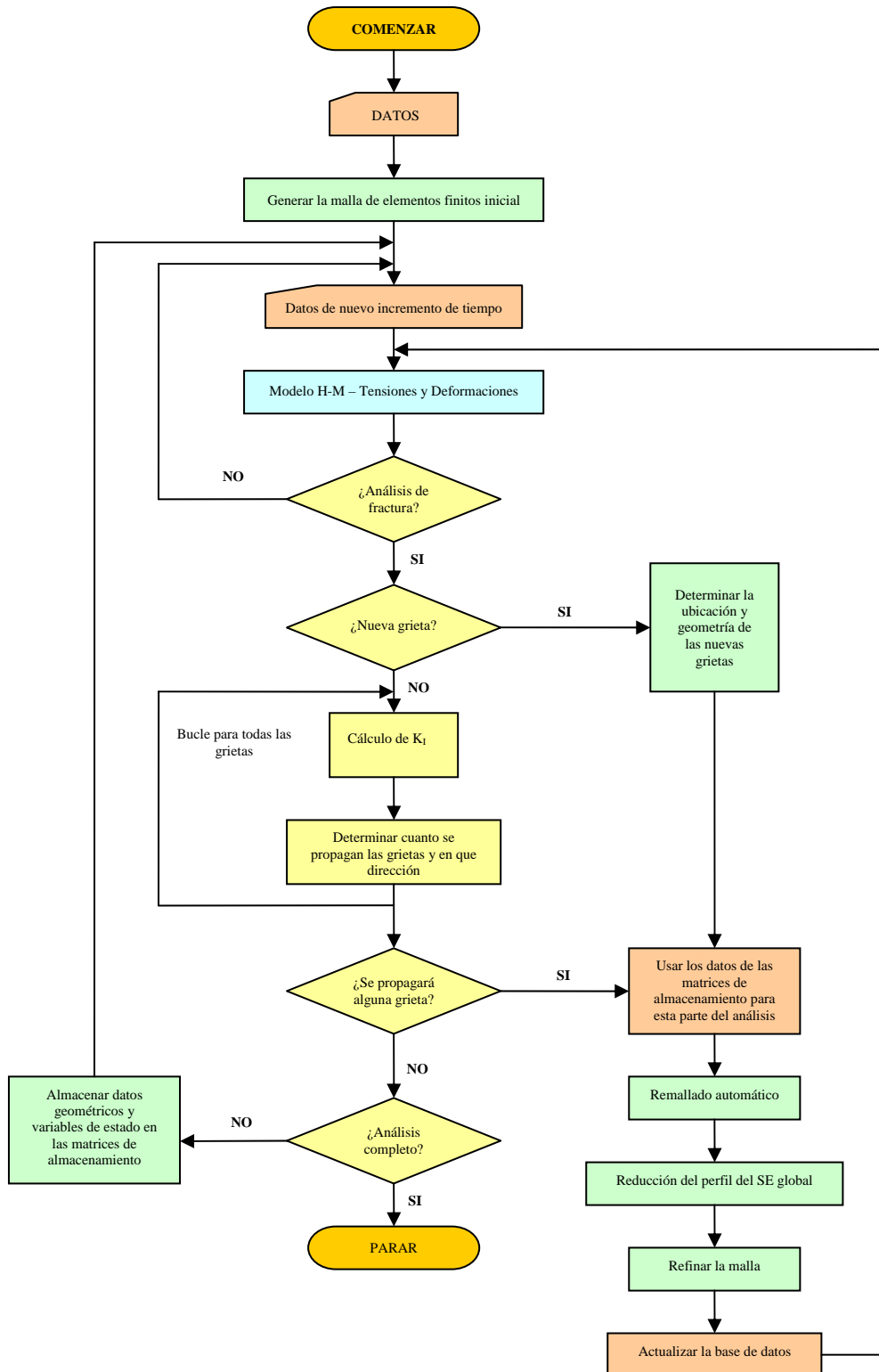


Figura 8.1 - Diagrama de flujo del modelo de grietas por desecación en suelos



# Capítulo 9

## CONCLUSIONES

### 9.1.- Conclusiones finales

El proceso de desecación de suelos es un fenómeno muy complejo en el que intervienen problemas de flujo y deformación de manera acoplados. En este trabajo solo se abarca la componente mecánica del problema y de allí las limitaciones a la hora de obtener resultados. Si añadimos a esto el proceso de formación y propagación de grietas el problema es aún peor. Al proceso de contracción hidromecánico se acopla el problema de mecánica de fractura que conlleva la complicación de tener que capturar las nuevas geometrías cambiantes a través del tiempo.

Si nos centramos en el problema mecánico vemos que trabajar con un modelo lineal es sumamente limitante puesto que los parámetros del suelo se ven muy afectados por los cambios de humedad durante el proceso de secado. En este modelo este problema se ha resuelto actualizando el parámetro más importante, el módulo volumétrico debido a succión  $K_s$  en cada elemento y en cada paso de carga.

El presente trabajo aporta la comprobación de que los cambios de succión son los principales responsables de la contracción durante el proceso de secado y la formación y propagación de grietas. Los cambios en la succión provocan cambios en las tensiones en la masa de suelo apareciendo en ciertos puntos tracciones capaces de vencer la resistencia a tracción del suelo en determinado momento. Una cuestión importante es recordar que esta resistencia es función además del valor de la succión.

En el proceso de contracción si no hay restricciones aplicadas mediante las condiciones de contorno no se producen tensiones de tracción que puedan en general agrietar el suelo.

Bajo condiciones de contorno distintas las configuraciones de las tensiones y de las grietas serán en general distintas.

Cuando se imponen condiciones de contorno tal que los extremos de la muestra quedan libres aunque sea parcialmente se ven levantamientos (rizados) en el suelo. Este fenómeno denominado en inglés “curling” es típico en los procesos de desecación.



Se han implementado dos tipos de elementos triangulares. El elemento lineal cuadrático se ha comportado en general mas adecuadamente para reproducir el fenómeno estudiado por lo que es recomendable utilizarlo para formulaciones futuras mas complejas.

# Referencias

## R.1.- LIBROS

- [1] Fredlund, D. G. and Rahardjo, H. **Soil mechanics for unsaturated soils**. Wiley-Interscience Publication. 1993.
- [2] Zienkiewicz, O. C. y Taylor, R. L. **El método de los elementos finitos. Las Bases**. (5ta. Edición). (Tomos 1 y 2). CIMNE. 2004.
- [3] Lewis, R. W. and Schrefler, B. A. **The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media**. John Wiley and Sons. 1998.
- [4] Chen, W. F. and Mizuno, E. **Nonlinear analysis in soil mechanics**. Theory and implementation –Elsevier. 1990.
- [5] Budhu, Muni. **Soils mechanics and foundations**. Wiley. 2007

## R.2.- ARTICULOS

- [1] Abu-Hejleh, A. N. and Znidarcic, D. **Desiccation theory for soft cohesive soils**. ASCE, *Journal of Geotechnical Engineering*, 121 6:493–502. 1995.
- [2] Biot, Maurice A. **General Theory of Three-Dimensional Consolidation**. *Journal of Applied Physics* **12**, 155-164. 1941.
- [3] Chertkov, V. Y. and Ravina, I. **Shrinking-swelling phenomenon of clay attributed to capillary-crack network**. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 34:61–71. 2000.
- [4] Fredlund, Delwyn G. and Morgenstern, Norbert R. **Stress State Variables for Unsaturated Soils**. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science & Geomechanics*, Vol.14, Issue 4, Page 56. July 1977.
- [5] Konrad, J.M. and Ayad, R. **An idealized framework for the analysis of cohesive soils undergoing desiccation**. *Canadian Geotechnical Journal*, 34:477–488. 1997b.
- [6] Levatti, H.U., Prat, P. and Ledesma, A. **Numerical modelling of formation and propagation of drying cracks in soils**. *COMPLAS IX*. 2007.
- [7] Lloret, A. and Alonso, E. E. **State Surfaces for Partially Saturated Soils**. 1985
- [8] Matyas, E. L. and Radhakrishna, H. S. **Volume change characteristics of Partially Saturated Soils**. *Geotechnique*, **18**: 432-448. 1968.
- [9] Morris, P.H., Graham, J. and Williams, D. J. **Cracking in drying soils**. *Canadian Geotechnical Journal*, 29: 263–277. 1991.
- [10] Hu, L., Peron, H., Hueckel, T. and Laloui, L. **Numerical and phenomenological study of desiccation of soil**. *Advances in unsaturated soil, seepage and environmental geomechanics*, GSP 148 ASCE 166:173. Lu, N., Hoyos, R.L. and Reddi, L. (eds). 2006.
- [11] Van Genuchten, M.Th. **Closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils**. *Soil Science Society of American Journal*, v 44, n 5, Sep-Oct, pages 892-898. 1980.



## Apéndice 1

# CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE MECÁNICA DE SUELOS

El suelo es en general un sistema trifásico, una fase sólida (granos de suelo), una fase líquida (generalmente agua) y una fase gaseosa (generalmente aire). Esquemáticamente podemos dibujar el siguiente esquema que representa a dichas fases:

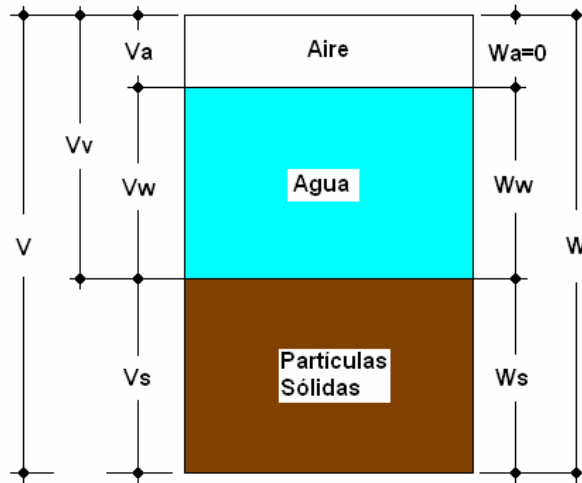


Figura A.I.1 - Esquema de las fases del suelo no saturado

### A.I.1.- Relaciones volumétricas

El volumen total de una porción de suelo viene dado por la suma de los volúmenes de las tres fases que lo componen, así:

$$V = V_s + V_w + V_a \quad (\text{AI. 1})$$

El volumen de vacíos es la suma del volumen de agua más el volumen de aire:

$$V_v = V_w + V_a \quad (\text{AI. 2})$$

Existen una serie de parámetros que se definen a partir de las relaciones de volúmenes, de los cuales los más importantes son:

La Porosidad:

$$n = \frac{V_v}{V} = \frac{\text{Volumen de poros}}{\text{Volumen total}} \quad (\text{AI. 3})$$

El Índice de poros o Relación de vacíos:

$$e = \frac{V_v}{V_s} = \frac{\text{Volumen de poros}}{\text{Volumen sólido}} \quad (\text{AI. 4})$$

El Grado de saturación:

$$S_r = \frac{V_w}{V_s} = \frac{\text{Volumen de agua}}{\text{Volumen sólido}} \quad (\text{AI.5})$$

Relación entre la porosidad y la relación de vacíos:

$$n = \frac{e}{1 + e} \quad (\text{AI.6})$$

$$e = \frac{n}{1 - n} \quad (\text{AI.7})$$

El Volumen específico:

$$V' = \frac{V}{V_s} = 1 + e \quad (\text{AI.8})$$

## A.I.2.- Relaciones gravimétricas

Contenido de Humedad:

$$w = \frac{W_w}{W_s} \times 100\% = \frac{\text{Peso de agua}}{\text{Peso sólido}} \times 100\% \quad (\text{AI.9})$$

## A.I.3.- Otras variables importantes

“Pressure head” es la presión en exceso de la presión atmosférica dividida por el peso específico:

$$\left( \psi = \frac{p}{\gamma} \right) \quad (\text{AI. 10})$$

“Hydraulic head” es la “pressure head” mas la altura en el punto donde se mida respecto de un plano arbitrario:

$$h = \psi + z \quad (\text{AI. 11})$$

“Volumetric Water content” es el contenido volumétrico de agua que se define:

$$\theta = \frac{V_w}{V_s} \quad (\text{AI. 12})$$

Donde  $V_w$  es el volumen de agua y  $V_s$  es el volumen de las partículas sólidas de suelo.



## Apéndice 2

# NOTACION MATRICIAL USADA EN ESTE TRABAJO

### A.2.1.- Gradiente simétrico del campo de desplazamientos

Según la Mecánica de los Medios Continuos, los desplazamientos y las deformaciones están relacionados mediante la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} \quad (\text{AII. 1})$$

Donde:  $\nabla^s$ , es el operador gradiente simétrico,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , es el tensor de deformaciones de Cauchy y  $\mathbf{u}$ , es el campo de los desplazamientos.

Existen varios tipos de notación para expresar que es lo que hace este operador. Así en notación compacta, la equivalencia es la siguiente:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) \quad (\text{AII. 2})$$

Donde,  $\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}^T$ , es el operador gradiente.

En notación indicial esta operación viene expresada de la siguiente manera:

$$\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \quad (\text{AII. 3})$$

Por último, la notación matricial expresa esto de dos formas:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \nabla^T + \nabla \mathbf{u}^T) = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (\text{AII. 4})$$



Donde,  $L$ , es el operador matricial, gradiente simétrico.

Veamos ahora detalladamente que significa aplicar el gradiente simétrico al campo vectorial de los desplazamientos.

Suponiendo que los tensores de 2º orden son expresados como matrices cuadradas de 3x3 y los vectores (tensores de 1º orden) mediante arreglos columnas de 3x1:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix} \right\} = \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \right\} = \quad \text{(AII.5)} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ahora usando notación de Voigt y asumiendo la simetría del tensor de deformación

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} :$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{AII. 6})$$

Si aplicamos directamente el operador  $\mathbf{L}$ , la operación se expresa:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{AII. 7})$$

Recordar además que  $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$ ,  $\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz}$ ,  $\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}$ , en notación ingenieril.

Ahora bien en 2D, tenemos:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{AII. 8})$$

En un elemento triangular lineal de tres nodos, los desplazamientos se aproximan con los valores nodales  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{u}}$  y las deformaciones son constantes en todo el elemento:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} &= \mathbf{L} \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} u_3 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} v_3 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial N_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial N_2}{\partial y} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} u_3 + \frac{\partial N_3}{\partial y} v_3 \end{bmatrix} \quad (\text{AII. 9}) \end{aligned}$$

### A.2.2.- Teorema de la Divergencia de Gauss

El teorema de la Divergencia de Gauss en notación vectorial e indicial se puede escribir:

$$\iiint_V \text{div} \cdot \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS \quad \text{ó} \quad \int_V F_{i,i} dV = \int_S F_i n_i dS \quad (\text{AII. 10})$$

Donde  $n_i$ , es el vector de cosenos directores de un vector unitario perpendicular a la superficie del contorno,  $dV$  es el volumen elemental y  $dS$  es un diferencial de área.  $F_i$ , es un vector pero podría ser un tensor de cualquier orden, por ejemplo para un tensor cartesiano de segundo orden:

$$\int_V F_{ij,j} dV = \int_S F_{ij} n_j dS \quad (\text{AII. 11})$$

### A.2.3.- Notación

Se trabajará paralelamente con notación indicial y notación compacta

#### A.2.3.1.- Tensor de tensiones

En forma matricial:

$$\sigma_{ij} \equiv \boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (\text{AII. 12})$$

Notación de Voigt 3D:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{zx} \end{bmatrix}^T \quad (\text{AII. 13})$$

Notación de Voigt 2D:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}^T \quad (\text{AII. 14})$$

#### A.2.3.2.- Tensor de deformaciones infinitesimales

En forma matricial:

$$\varepsilon_{ij} \equiv \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (\text{AII. 15})$$

Notación de Voigt 3D:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T \quad (\text{AII. 16})$$

Notación de Voigt 2D:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T \quad \text{con} \quad \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} \quad (\text{AII. 17})$$

#### A.2.3.3.- Campo gravitacional terrestre

En 3D:

$$\mathbf{g} = [0 \quad 0 \quad -g]^T \quad (\text{AII. 18})$$

En 2D:

$$\mathbf{g} = [0 \quad -g]^T \quad (\text{AII. 19})$$

Donde g: es la aceleración de la gravedad que se supone coincide con el eje “z” en 3D y con el eje “y” en 2D.

#### A.2.3.4.- Delta de Kronecker

En forma matricial:

$$\delta_{ij} \equiv \mathbf{1} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{AII. 20})$$

Notación de Voigt 3D:

$$\mathbf{m} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (\text{AII. 21})$$

Notación de Voigt 2D:

$$\mathbf{m} = [1 \quad 1 \quad 0]^T \quad (\text{AII. 22})$$

Se utiliza el símbolo  $\equiv$  y no el  $=$  porque hay una sutil diferencia entre la notación indicial que expresa los tensores y vectores en componentes, la notación compacta que expresa a la entidad tensor y la matriz de componentes que muestra la notación matricial.

### A.2.4.- Operadores diferenciales en notación de índices, compacta y matricial

Operador	Notación de índices	Notación compacta	Notación matricial
Gradiente de un escalar $\phi$	$\phi_{,i}$	$\nabla \phi$	$grad(\phi)$
Gradiente de un vector $u_i, \mathbf{u}$	$u_{i,j}$	$\nabla \mathbf{u}$	$grad(\mathbf{u})$
Gradiente simétrico de un vector $u_i, \mathbf{u}$	$u_{i,j} + u_{j,i}$	$\nabla^s \mathbf{u}$	$\mathbf{L} \mathbf{u}$
Gradiente de un tensor de 2do. Orden $\sigma_{ij}$ ó $\boldsymbol{\sigma}$	$\sigma_{ij,k}$	$\nabla \boldsymbol{\sigma}$	$grad(\boldsymbol{\sigma})$
Divergencia de un vector $u_i, \mathbf{u}$	$u_{i,i}$	$\bar{\nabla}^T \mathbf{u}$ ó $\nabla \cdot \mathbf{u}$	$div(\mathbf{u})$
Divergencia de un tensor de 2do. Orden $\sigma_{ij}$ ó $\boldsymbol{\sigma}$	$\sigma_{ij,j}$	$\bar{\nabla}^T \boldsymbol{\sigma}$ ó $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$	$div(\boldsymbol{\sigma})$

### A.2.5.- Operador divergencia en forma matricial

$$\text{En 3D: } \nabla \cdot \equiv \bar{\nabla}^T \equiv \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{AII. 23})$$

$$\text{En 2D: } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{AII. 24})$$

### A.2.6.- Operador de condiciones de contorno

$$\text{En 3D: } \mathbf{I} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 \\ 0 & n_y & 0 \\ 0 & 0 & n_z \\ n_y & n_x & 0 \\ 0 & n_z & n_y \\ n_z & 0 & n_x \end{bmatrix} \quad (\text{AII. 25})$$

$$\text{En 2D: } \mathbf{I} = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (\text{AII. 26})$$

# Apéndice 3

## MESH2D GNU LICENSE

GNU GENERAL PUBLIC LICENSE  
Version 2, June 1991

Copyright (C) 1989, 1991 Free Software Foundation, Inc. 51 Franklin Street, Fifth Floor, Boston, MA 02110-1301 USA.  
Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

### Preamble

The licenses for most software are designed to take away your freedom to share and change it. By contrast, the GNU General Public License is intended to guarantee your freedom to share and change free software--to make sure the software is free for all its users. This General Public License applies to most of the Free Software Foundation's software and to any other program whose authors commit to using it. (Some other Free Software Foundation software is covered by the GNU Lesser General Public License instead.) You can apply it to your programs, too.

When we speak of free software, we are referring to freedom, not price. Our General Public Licenses are designed to make sure that you have the freedom to distribute copies of free software (and charge for this service if you wish), that you receive source code or can get it if you want it, that you can change the software or use pieces of it in new free programs; and that you know you can do these things.

To protect your rights, we need to make restrictions that forbid anyone to deny you these rights or to ask you to surrender the rights. These restrictions translate to certain responsibilities for you if you distribute copies of the software, or if you modify it.

For example, if you distribute copies of such a program, whether gratis or for a fee, you must give the recipients all the rights that you have. You must make sure that they, too, receive or can get the source code. And you must show them these terms so they know their rights.

We protect your rights with two steps: (1) copyright the software, and (2) offer you this license which gives you legal permission to copy, distribute and/or modify the software.

Also, for each author's protection and ours, we want to make certain that everyone understands that there is no warranty for this free software. If the software is modified by someone else and passed on, we want its recipients to know that what they have is not the original, so that any problems introduced by others will not reflect on the original authors' reputations.

Finally, any free program is threatened constantly by software patents. We wish to avoid the danger that redistributors of a free program will individually obtain patent licenses, in effect making the program proprietary. To prevent this, we have made it clear that any patent must be licensed for everyone's free use or not licensed at all.

The precise terms and conditions for copying, distribution and modification follow.

### GNU GENERAL PUBLIC LICENSE

#### TERMS AND CONDITIONS FOR COPYING, DISTRIBUTION AND MODIFICATION

0. This License applies to any program or other work which contains a notice placed by the copyright holder saying it may be distributed under the terms of this General Public License. The "Program", below, refers to any such program or work, and a "work based on the Program" means either the Program or any derivative work under copyright law: that is to say, a work containing the Program or a portion of it, either verbatim or with modifications and/or translated into another language. (Hereinafter, translation is included without limitation in the term "modification".) Each licensee is addressed as "you".

Activities other than copying, distribution and modification are not covered by this License; they are outside its scope. The act of running the Program is not restricted, and the output from the Program

is covered only if its contents constitute a work based on the Program (independent of having been made by running the Program). Whether that is true depends on what the Program does.

1. You may copy and distribute verbatim copies of the Program's source code as you receive it, in any medium, provided that you conspicuously and appropriately publish on each copy an appropriate

copyright notice and disclaimer of warranty; keep intact all the notices that refer to this License and to the absence of any warranty; and give any other recipients of the Program a copy of this License along with the Program.

You may charge a fee for the physical act of transferring a copy, and you may at your option offer warranty protection in exchange for a fee.

2. You may modify your copy or copies of the Program or any portion of it, thus forming a work based on the Program, and copy and distribute such modifications or work under the terms of Section 1 above, provided that you also meet all of these conditions:

- a) You must cause the modified files to carry prominent notices stating that you changed the files and the date of any change.
- b) You must cause any work that you distribute or publish, that in whole or in part contains or is derived from the Program or any part thereof, to be licensed as a whole at no charge to all third parties under the terms of this License.

c) If the modified program normally reads commands interactively when run, you must cause it, when started running for such interactive use in the most ordinary way, to print or display an announcement including an appropriate copyright notice and a notice that there is no warranty (or else, saying that you provide a warranty) and that users may redistribute the program under these conditions, and telling the user how to view a copy of this License. (Exception: if the Program itself is interactive but does not normally print such an announcement, your work based on the Program is not required to print an announcement.)

These requirements apply to the modified work as a whole. If identifiable sections of that work are not derived from the Program, and can be reasonably considered independent and separate works in themselves, then this License, and its terms, do not apply to those sections when you distribute them as separate works. But when you distribute the same sections as part of a whole which is a



work based on the Program, the distribution of the whole must be on the terms of this License, whose permissions for other licensees extend to the entire whole, and thus to each and every part regardless of who wrote it.

Thus, it is not the intent of this section to claim rights or contest your rights to work written entirely by you; rather, the intent is to exercise the right to control the distribution of derivative or collective works based on the Program.

In addition, mere aggregation of another work not based on the Program with the Program (or with a work based on the Program) on a volume of a storage or distribution medium does not bring the other work under the scope of this License.

3. You may copy and distribute the Program (or a work based on it, under Section 2) in object code or executable form under the terms of Sections 1 and 2 above provided that you also do one of the following:

a) Accompany it with the complete corresponding machine-readable source code, which must be distributed under the terms of Sections 1 and 2 above on a medium customarily used for software interchange; or,

b) Accompany it with a written offer, valid for at least three years, to give any third party, for a charge no more than your cost of physically performing source distribution, a complete machine-readable copy of the corresponding source code, to be distributed under the terms of Sections 1 and 2 above on a medium customarily used for software interchange; or,

c) Accompany it with the information you received as to the offer to distribute corresponding source code. (This alternative is allowed only for noncommercial distribution and only if you received the program in object code or executable form with such an offer, in accord with Subsection b above.)

The source code for a work means the preferred form of the work for making modifications to it. For an executable work, complete source code means all the source code for all modules it contains, plus any associated interface definition files, plus the scripts used to control compilation and installation of the executable. However, as a special exception, the source code distributed need not include anything that is normally distributed (in either source or binary form) with the major components (compiler, kernel, and so on) of the operating system on which the executable runs, unless that component itself accompanies the executable.

If distribution of executable or object code is made by offering access to copy from a designated place, then offering equivalent access to copy the source code from the same place counts as distribution of the source code, even though third parties are not compelled to copy the source along with the object code.

4. You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Program except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to copy, modify, sublicense or distribute the Program is void, and will automatically terminate your rights under this License.

However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

5. You are not required to accept this License, since you have not signed it. However, nothing else grants you permission to modify or distribute the Program or its derivative works. These actions are prohibited by law if you do not accept this License. Therefore, by modifying or distributing the Program (or any work based on the Program), you indicate your acceptance of this License to do so, and all its terms and conditions for copying, distributing or modifying the Program or works based on it.

6. Each time you redistribute the Program (or any work based on the Program), the recipient automatically receives a license from the original licensor to copy, distribute or modify the Program subject to these terms and conditions. You may not impose any further restrictions on the recipients' exercise of the rights granted herein. You are not responsible for enforcing compliance by third parties to this License.

7. If, as a consequence of a court judgment or allegation of patent infringement or for any other reason (not limited to patent issues), conditions are imposed on you (whether by court order, agreement or otherwise) that contradict the conditions of this License, they do not excuse you from the conditions of this License. If you cannot distribute so as to satisfy simultaneously your obligations under this License and any other pertinent obligations, then as a consequence you may not distribute the Program at all. For example, if a patent license would not permit royalty-free redistribution of the Program by all those who receive copies directly or indirectly through you, then the only way you could satisfy both it and this License would be to refrain entirely from distribution of the Program.

If any portion of this section is held invalid or unenforceable under any particular circumstance, the balance of the section is intended to apply and the section as a whole is intended to apply in other circumstances.

It is not the purpose of this section to induce you to infringe any patents or other property right claims or to contest validity of any such claims; this section has the sole purpose of protecting the integrity of the free software distribution system, which is implemented by public license practices. Many people have made generous contributions to the wide range of software distributed through that system in reliance on consistent application of that system; it is up to the author/donor to decide if he or she is willing to distribute software through any other system and a licensee cannot impose that choice.

This section is intended to make thoroughly clear what is believed to be a consequence of the rest of this License.

8. If the distribution and/or use of the Program is restricted in certain countries either by patents or by copyrighted interfaces, the original copyright holder who places the Program under this License may add an explicit geographical distribution limitation excluding those countries, so that distribution is permitted only in or among countries not thus excluded. In such case, this License incorporates the limitation as if written in the body of this License.

9. The Free Software Foundation may publish revised and/or new versions of the General Public License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns.

Each version is given a distinguishing version number. If the Program specifies a version number of this License which applies to it and "any later version", you have the option of following the terms and conditions either of that version or of any later version published by the Free Software Foundation. If the Program does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published by the Free Software Foundation.

10. If you wish to incorporate parts of the Program into other free programs whose distribution conditions are different, write to the author to ask for permission. For software which is copyrighted by the Free Software Foundation, write to the Free Software

Foundation; we sometimes make exceptions for this. Our decision will be guided by the two goals of preserving the free status of all derivatives of our free software and of promoting the sharing and reuse of software generally.

#### NO WARRANTY

11. BECAUSE THE PROGRAM IS LICENSED FREE OF CHARGE, THERE IS NO WARRANTY FOR THE PROGRAM, TO THE EXTENT PERMITTED BY APPLICABLE LAW. EXCEPT WHEN OTHERWISE STATED IN WRITING THE COPYRIGHT HOLDERS AND/OR OTHER PARTIES PROVIDE THE PROGRAM "AS IS" WITHOUT WARRANTY OF ANY KIND, EITHER EXPRESSED OR IMPLIED, INCLUDING, BUT NOT LIMITED TO, THE IMPLIED WARRANTIES OF MERCHANTABILITY AND FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. THE ENTIRE RISK AS TO THE QUALITY AND PERFORMANCE OF THE PROGRAM IS WITH YOU. SHOULD THE PROGRAM PROVE DEFECTIVE, YOU ASSUME THE COST OF ALL NECESSARY SERVICING, REPAIR OR CORRECTION.

12. IN NO EVENT UNLESS REQUIRED BY APPLICABLE LAW OR AGREED TO IN WRITING WILL ANY COPYRIGHT HOLDER, OR ANY OTHER PARTY WHO MAY MODIFY AND/OR REDISTRIBUTE THE PROGRAM AS PERMITTED ABOVE, BE LIABLE TO YOU FOR DAMAGES, INCLUDING ANY GENERAL, SPECIAL, INCIDENTAL OR CONSEQUENTIAL DAMAGES ARISING OUT OF THE USE OR INABILITY TO USE THE PROGRAM (INCLUDING BUT NOT LIMITED TO LOSS OF DATA OR DATA BEING RENDERED INACCURATE OR LOSSES SUSTAINED BY YOU OR THIRD PARTIES OR A FAILURE OF THE PROGRAM TO OPERATE WITH ANY OTHER PROGRAMS), EVEN IF SUCH HOLDER OR OTHER PARTY HAS BEEN ADVISED OF THE POSSIBILITY OF SUCH DAMAGES.

#### END OF TERMS AND CONDITIONS

#### How to Apply These Terms to Your New Programs

If you develop a new program, and you want it to be of the greatest possible use to the public, the best way to achieve this is to make it free software which everyone can redistribute and change under these terms.

To do so, attach the following notices to the program. It is safest to attach them to the start of each source file to most effectively convey the exclusion of warranty; and each file should have at least the "copyright" line and a pointer to where the full notice is found.

<one line to give the program's name and a brief idea of what it does.>

Copyright (C) <year> <name of author>

This program is free software; you can redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU General Public License as published by the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or (at your option) any later version.

This program is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License for more details.

You should have received a copy of the GNU General Public License along with this program; if not, write to the Free Software Foundation, Inc., 51 Franklin Street, Fifth Floor, Boston, MA 02110-1301 USA

Also add information on how to contact you by electronic and paper mail.

If the program is interactive, make it output a short notice like this when it starts in an interactive mode:

Gnomovision version 69, Copyright (C) year name of author Gnomovision comes with ABSOLUTELY NO WARRANTY; for details type `show w'.

This is free software, and you are welcome to redistribute it under certain conditions; type `show c' for details.

The hypothetical commands `show w' and `show c' should show the appropriate parts of the General Public License. Of course, the commands you use may be called something other than `show w' and `show c'; they could even be mouse-clicks or menu items--whatever suits your program.

You should also get your employer (if you work as a programmer) or your school, if any, to sign a "copyright disclaimer" for the program, if necessary. Here is a sample; alter the names:

Yoyodyne, Inc., hereby disclaims all copyright interest in the program

`Gnomovision' (which makes passes at compilers) written by James Hacker.

<signature of Ty Coon>, 1 April 1989

Ty Coon, President of Vice

This General Public License does not permit incorporating your program into proprietary programs. If your program is a subroutine library, you may consider it more useful to permit linking proprietary applications with the library. If this is what you want to do, use the GNU Lesser General Public License instead of this License.



# Apéndice Digital

## CODIGOS

En este apéndice se entrega una guía de los códigos utilizados en la tesina junto con algunas aclaraciones. Los archivos son entregados en un CD Anexo. Para el desarrollo de todo el trabajo se ha utilizado el programa Matlab v7.5.0 (R2007b).

### **AD.1.- Preproceso**

Cuando se utiliza el método de los elementos finitos, es necesario en primer lugar realizar la discretización del dominio de trabajo utilizando algún programa. Para realizar las primeras pruebas y tener un total control sobre los elementos de la malla se ha optado en primera medida por programar un mallador sencillo y estructurado en Matlab. En ciertas ocasiones es mejor contar con un programa más robusto y que genere mallas no estructuradas, sobre todo cuando la geometría deba actualizarse alrededor de grietas que van progresando. En este trabajo no es estrictamente necesario su uso pero se implementó para comprobar que era posible acoplar el mallador Mesh2d v2.0 al programa implementado. Como puede verse en los resultados este propósito ha sido posible de manera sencilla. El mallador Mesh2d v2.0 viene bajo licencia GNU que se transcribe en el apéndice IV.

### **AD.2.- Mallador estructurado**

El mallador estructurado es simplemente un archivo de matlab llamado Mallador.m que triangula un dominio rectangular con triángulos de 3 o 6 nodos.

### **AD.3.- Resolución del problema por el método de los elementos finitos en matlab**

Se han utilizado dos versiones del programa que resuelve el problema mecánico de la desecación:

01-Mec no sat lineal con mesh2d y

02-Mec no sat succ variable cuasilin T3 y T6

En el primer caso la rutina principal es Main.m y en el segundo A\_Main\_MecNoSatLin.m.

## **AD.4.- Problema hidráulico 1D**

Para resolver el problema hidráulico 1D y tener una guía a la hora de elegir el tipo de succión a imponer en el problema mecánico se ha utilizado un programa llamada austere encontrado en la Web y que esta escrito para Matlab. El programa resuelve la ecuación de Richard en 1D mediante un método explícito en diferencias finitas.

## **AD.5.- Resumen de carpetas entregadas en el CD**

01-Mec no sat lineal con mesh2d

02-Mec no sat succ variable cuasilin T3 y T6

AUSTERE

Mesh2d v2.0